

Analisi Matematica – Ingegneria Informatica
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A. 21/22 - Scritto n. 7

Matricola:

Cognome: Nome:

Domanda: 1 2 3 4 5 6

Risposta:

Per ognuna delle 6 domande sono suggerite 4 risposte, una sola esatta. 4 risposte esatte assicurano la sufficienza.

1. Sia $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ la soluzione massimale del Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x}y \\ y(1) = 3. \end{cases}$ Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) φ è inferiormente limitata.
 (2) φ è una funzione dispari.

1.A Solo la prima. Nessuna delle altre affermazioni è esatta. 1.B
 1.C Entrambe. Solo la seconda. 1.D

2. Sia $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$ una funzione non costante e tale che $\nabla f(x, y)$ è parallelo al vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) f è una funzione illimitata
 (2) se f ammette un punto di massimo stretto (o forte), allora il massimo è in $(0, 0)$

2.A solo la (2) solo la (1) 2.B
 2.C entrambe nessuna 2.D

3. Sia $y = \varphi(x)$ la funzione definita implicitamente da $\frac{x}{2}e^y + y + 1 = 0$ in un intorno di $(0, -1)$. Allora:

3.A $\varphi(x) = -1 - \frac{1}{2e}x + \frac{1}{e}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. $\varphi(x) = -1 - \frac{1}{2e}x + \frac{1}{4e^2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. 3.B
 3.C $\varphi(x) = -1 - \frac{1}{2e}x + \frac{1}{4e}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Nessuna delle altre affermazioni è esatta. 3.D

4. Si consideri l'insieme $X = \mathbf{C}^0([0, 1]; \mathbf{R})$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) La funzione $\delta(f, g) = \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right|$ è una distanza.
 (2) La funzione $d(f, g) = \int_0^1 |f^4(x) - g^4(x)|dx$ è una distanza.

- 4.A Entrambe. Nessuna delle altre affermazioni è esatta. **4.B**
 4.C Solo la seconda. Solo la prima. **4.D**

5. Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ e di $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, sia $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ data da $f_n(x) = n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{2n^2}\right) \chi_{[-n-1, n-2]}(x)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) Se $\alpha < 1$, f_n converge uniformemente su \mathbf{R} .
 (2) Se $\alpha \leq 2$, f_n converge puntualmente su \mathbf{R} ad una funzione limitata.

- 5.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta. Solo la prima. **5.B**
 5.C Solo la seconda. Entrambe. **5.D**

6. Al variare di $\alpha > 0$ sia $f_\alpha: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita per $(x, y) \neq (0, 0)$ da $f_\alpha(x, y) = \frac{3x^3 + 2|y|^{2\alpha+1}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ e da $f_\alpha(0, 0) = 0$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) f_α è differenziabile in $(0, 0) \iff \alpha > 1/2$.
 (2) f_α ammette derivata parziale rispetto a y in ogni punto di \mathbf{R}^2 , per ogni $\alpha > 0$.

- 6.A Solo la seconda. Solo la prima. **6.B**
 6.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta. Entrambe. **6.D**

Analisi Matematica – Ingegneria Informatica
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A. 21/22 - Scritto n. 7

Risposte esatte:

1 2 3 4 5 6

Compito A: A A B B B B