

**Analisi Matematica C**

**Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A 08/09 – Primo Scritto**

Matricola: 

--	--	--	--	--

Cognome: ..... Nome: .....

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta:								

Per ognuna delle 10 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 3 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/4. Per ogni risposta non data 0.

**1.** Fissata una funzione  $g \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ , sia definita al variare di  $n \in \mathbf{N}$  e di  $x \in \mathbf{R}$ , la successione di funzioni  $f_n(x) = n \int_0^x g(t/n!) dt$ . Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

(1)  $f_n \xrightarrow{p} 0$  su  $\mathbf{R} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$

(2) Esiste una  $g$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)$  non esiste o esiste non finito

- |  |                      |
|--|----------------------|
| <b>1.A</b> solo la 1                                 | <b>1.B</b> entrambe  |
| <b>1.C</b> nessuna delle altre affermazioni è esatta | <b>1.D</b> solo la 2 |

**2.** Siano  $f, \varphi \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  due funzioni  $2\pi$ -periodiche con coefficienti di Fourier, rispettivamente,  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  e  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ . Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

(1)  $f \neq \varphi \Rightarrow a_n \neq \alpha_n$  e  $b_n \neq \beta_n$  per ogni  $n$

(2)  $f = 2\varphi \Rightarrow a_n = 2\alpha_n$  e  $b_n = 2\beta_n$  per ogni  $n$

- |  |                      |
|--|----------------------|
| <b>2.A</b> nessuna delle altre affermazioni è esatta | <b>2.B</b> solo la 1 |
| <b>2.C</b> entrambe                                  | <b>2.D</b> solo la 2 |

**3.** Determinata la soluzione  $\varphi_n$  del Problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = \frac{n}{x} y \\ y(1) = 1 \end{cases}$ , la somma della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(3)}{n!}$  risulta

- |                  |  |
|------------------|--|
| <b>3.A</b> $e^3$ | <b>3.B</b> nessuna delle altre affermazioni è esatta |
| <b>3.C</b> 1     | <b>3.D</b> $\cos 3$                                  |

**4.** Sia  $X$  uno spazio vettoriale munito di due metriche  $d_1$  e  $d_2$  tra loro equivalenti. L'implicazione

$(X, d_1)$  è uno spazio metrico completo  $\Rightarrow (X, d_2)$  è uno spazio metrico completo

**4.A** è vera, indipendentemente dalla dimensione di  $X$

- 4.B è vera se e solo se  $X \subseteq \mathbf{R}$   
 4.C è vera se e solo se  $\dim X$  è finita  
 4.D nessuna delle altre affermazioni è esatta

5. In  $X = \mathbf{C}^0([0, 1]; \mathbf{R})$  si considerino la distanza  $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$  e la funzione  $T: X \mapsto X$  definita da  $T(f) = 1 - e^f$ . Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1)  $T$  ammette un punto fisso  
 (2)  $T$  e  $(X, d_1)$  soddisfano alle ipotesi del teorema delle contrazioni

- 5.A solo la 2 entrambe 5.B  
 5.C solo la 1 nessuna delle altre affermazioni è esatta 5.D

6. Siano  $f, g: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ . Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1)  $g$  Lipschitz e  $f$  uniformemente continua  $\Rightarrow f + g$  uniformemente continua  
 (2)  $f$  uniformemente continua su ogni compatto di  $\mathbf{R} \Rightarrow f$  uniformemente continua su  $\mathbf{R}$

- 6.A nessuna delle altre affermazioni è esatta solo la 1 6.B  
 6.C solo la 2 entrambe 6.D

7. Il problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- 7.A ammette un'unica soluzione massimale definita su  $] -1, 1[$   
 7.B nessuna delle altre affermazioni è esatta  
 7.C ammette un'unica soluzione massimale definita su  $\mathbf{R}$   
 7.D ammette un'unica soluzione massimale definita su  $] -1, +\infty[$

8. Sia  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$  e sia  $f_n: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  data da  $f_n(x) = e^n \chi_{[n, n+1]}(x) - \sqrt{n} \chi_{[n+1/2, n+3/2]}(x)$ . Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1)  $f_n \xrightarrow{p} 0$  su  $\mathbf{R}$   
 (2)  $f_n \xrightarrow{u} 0$  su  $] -10, 100[$

- 8.A solo la 2 nessuna delle altre affermazioni è esatta 8.B  
 8.C solo la 1 entrambe 8.D

**Analisi Matematica C**  
**Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A 08/09 – Primo Scritto**

Risposte esatte:

1 2 3 4 5 6 7 8

Compito A: C D A A C B A D