

Analisi Matematica C

Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A 08/09 – Primo Scritto

Matricola:

--	--	--	--	--

Cognome: Nome:

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta:								

Per ognuna delle 10 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 3 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/4. Per ogni risposta non data 0.

1. Fissata una funzione $g \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, sia definita al variare di $n \in \mathbf{N}$ e di $x \in \mathbf{R}$, la successione di funzioni $f_n(x) = n \int_0^x g(t/n!) dt$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

$$(1) \quad f_n \xrightarrow{p} 0 \text{ su } \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$$

(2) Esiste una g tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)$ non esiste o esiste non finito

- | | |
|--|----------------------|
| 1.A solo la 1 | 1.B entrambe |
| 1.C nessuna delle altre affermazioni è esatta | 1.D solo la 2 |

2. Siano $f, \varphi \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ due funzioni 2π -periodiche con coefficienti di Fourier, rispettivamente, $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ e $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

$$(1) \quad f \neq \varphi \Rightarrow a_n \neq \alpha_n \text{ e } b_n \neq \beta_n \text{ per ogni } n$$

$$(2) \quad f = 2\varphi \Rightarrow a_n = 2\alpha_n \text{ e } b_n = 2\beta_n \text{ per ogni } n$$

- | | |
|--|----------------------|
| 2.A nessuna delle altre affermazioni è esatta | 2.B solo la 1 |
| 2.C entrambe | 2.D solo la 2 |

3. Determinata la soluzione φ_n del Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{n}{x} y \\ y(1) = 1 \end{cases}$, la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_n(3)}{n!}$ risulta

- | | |
|------------------|--|
| 3.A e^3 | 3.B nessuna delle altre affermazioni è esatta |
| 3.C 1 | 3.D $\cos 3$ |

4. Sia X uno spazio vettoriale munito di due metriche d_1 e d_2 tra loro equivalenti. L'implicazione

$$(X, d_1) \text{ è uno spazio metrico completo} \Rightarrow (X, d_2) \text{ è uno spazio metrico completo}$$

4.A è vera, indipendentemente dalla dimensione di X

- 4.B è vera se e solo se $X \subseteq \mathbf{R}$
 4.C è vera se e solo se $\dim X$ è finita
 4.D nessuna delle altre affermazioni è esatta

5. In $X = \mathbf{C}^0([0, 1]; \mathbf{R})$ si considerino la distanza $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ e la funzione $T: X \mapsto X$ definita da $T(f) = 1 - e^f$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) T ammette un punto fisso
 (2) T e (X, d_1) soddisfano alle ipotesi del teorema delle contrazioni

- 5.A solo la 2 entrambe 5.B
 5.C solo la 1 nessuna delle altre affermazioni è esatta 5.D

6. Siano $f, g: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) g Lipschitz e f uniformemente continua $\Rightarrow f + g$ uniformemente continua
 (2) f uniformemente continua su ogni compatto di $\mathbf{R} \Rightarrow f$ uniformemente continua su \mathbf{R}

- 6.A nessuna delle altre affermazioni è esatta solo la 1 6.B
 6.C solo la 2 entrambe 6.D

7. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- 7.A ammette un'unica soluzione massimale definita su $] -1, 1[$
 7.B nessuna delle altre affermazioni è esatta
 7.C ammette un'unica soluzione massimale definita su \mathbf{R}
 7.D ammette un'unica soluzione massimale definita su $] -1, +\infty[$

8. Sia $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e sia $f_n: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ data da $f_n(x) = e^n \chi_{[n, n+1]}(x) - \sqrt{n} \chi_{[n+1/2, n+3/2]}(x)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?

- (1) $f_n \xrightarrow{p} 0$ su \mathbf{R}
 (2) $f_n \xrightarrow{u} 0$ su $] -10, 100[$

- 8.A solo la 2 nessuna delle altre affermazioni è esatta 8.B
 8.C solo la 1 entrambe 8.D

Analisi Matematica C
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A 08/09 – Primo Scritto

Risposte esatte:

1 2 3 4 5 6 7 8

Compito A: C D A A C B A D