Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A 07-08 – Secondo Scritto

Matricola: | | | | | |

Cognome:.. Nome:..

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta:								

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. *Si consideri la serie trigonometrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} \operatorname{sen}(nx)$. *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

1.A La serie data è la serie di Fourier di una funzione continua su $\mathbf{R}$

1.B nessuna delle altre affermazioni è esatta

1.C La serie non è assolutamente convergente in $\mathbf{R}$

1.D La somma della serie non è integrabile in $[-\pi, \pi]$

2. *Sia* $\alpha \in \mathbf{R}$. *In un intorno di* $(x_1, x_2) = (0,0)$ *e* $(y_1, y_2) = (0,0)$, *il sistema*

$$\begin{cases} x_1\, y_1 + \alpha\, \cos(x_2\, y_2) - e^{y_2} = 0 \\ 3\, \operatorname{sen}(x_2\, y_2) + y_1 + \ln(1 + x_1\, y_2) = 0 \end{cases}$$

soddisfa alle ipotesi del Teorema della Funzione Implicita e definisce una funzione $(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2)$

2.A se e solo se $\alpha > 0$

2.B se e solo se $\alpha = 1$

2.C nessuna delle altre affermazioni è esatta

2.D se e solo se $|\alpha| < 1$

3. *Siano* $f\colon \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ *e* $g\colon \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$. *Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

$$(1) \qquad \det[f\ g] = \det \begin{bmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2), \quad g \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$$

$$(2) \qquad (f, g) \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^4) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2), \quad g \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$$

3.A solo la (2)

3.B solo la (1)

3.C entrambe

3.D nessuna

4. *Sia* $f_n\colon \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ *una successione di funzioni convergenti puntualmente su* $\mathbf{R}$ *alla funzione* $x \mapsto x \operatorname{sen} x$. *È allora certamente vero che:*

4.A per n grande, $f_n(\pi) \geq 0$

4.B per n grande, $f_n \in \mathbf{C^0}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$

4.C la convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$

4.D nessuna delle altre affermazioni è esatta

5. *Sia $f \in \mathbf{C^2}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R})$ con $\nabla f(0,0) = [0 \quad 0]$ e sia $H_f(0,0)$ la matrice Hessiana di f calcolata in $(0,0)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

$$\begin{array}{ll} (1) & \textit{se } f(t,t) = \cos t, \textit{ allora } H_f(0,0) \textit{ è definita negativa} \\ (2) & \textit{se } f(0,0) = \sup_{\mathbf{R}^2} f, \textit{ allora } H_f(0,0) \textit{ è definita positiva} \end{array}$$

5.A solo la (2) — nessuna **5.B**
5.C solo la (1) — entrambe **5.D**

6. *Sia φ_n la soluzione del problema di Cauchy* $\begin{cases} \dot{x} = \arctan(x/n)\frac{\cos(ne^x)+\pi n^2}{|x|+n!} \\ x(0) = \pi/4 \end{cases}$. *Allora*

6.A $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\pi) = 0$ — $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\pi) = \pi/4$ **6.B**
6.C $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\pi)$ non esiste finito — nessuna delle altre affermazioni è esatta **6.D**

7. *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$ non vuoto. Quale/i delle seguenti implicazioni è/sono VERA/E?*

1. $A = \mathring{A} \Rightarrow A = \bar{A}$
2. $A = \bar{A} \Rightarrow \partial A = \emptyset$

7.A nessuna delle altre affermazioni è esatta — Solo la 2. **7.B**
7.C Nessuna — Solo la 1. **7.D**

8. *Sia $\mathcal{P}$ la parabola con asse parallelo all'asse x, vertice $V(1,0)$ e passante per $A(2,1)$. Sia $\mathcal{T}$ la regione limitata di piano compresa tra $\mathcal{P}$ e la retta di equazione $x = 2$. Allora*

$$\int\int_{\mathcal{T}} \left(5xy^2 + e^x y^3 + x^4 \operatorname{sen} y\right) \, dx \, dy =$$

8.A 3/5 — nessuna delle altre affermazioni è esatta **8.B**
8.C 16/7 — 16/5 **8.D**

Risposte esatte:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Compito A:	A	B	A	D	B	B	C	C