Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A. 06/07 - Secondo Scritto

Matricola: | | | | | |

Cognome:.. Nome:..

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta:								

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. *Sia f_n, se esiste, la soluzione massimale del Problema di Cauchy* $\begin{cases} \dot{x} = \pi t + \dfrac{\left(\cos(x^n) + \pi t\right)/n}{1 + x^2 + \pi t^2} \\ x(0) = (1/n) + \ln \pi \end{cases}$. *Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}\pi + \ln \pi$$

(2) *per $n \to +\infty$, f_n ammette limite puntuale su $[-\pi, \pi]$*

1.A solo la (2) — entrambe **1.B**

1.C solo la (1) — nessuna **1.D**

2. *Sia $f \in \mathbf{C^1}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$ una funzione non costante e tale che $\nabla f(x, y)$ è parallelo al vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

(1) *f è una funzione illimitata*

(2) *se f ammette un punto di minimo stretto (o forte), allora il minimo è in $(0, 0)$*

2.A solo la (1) — nessuna **2.B**

2.C solo la (2) — entrambe **2.D**

3. *(Suggerimento: utilizzare l'uguaglianza di Bessel) La serie di Fourier della funzione f su $[-\pi, \pi]$ è data da* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n} \operatorname{sen}(nx)$. *Allora* $\displaystyle 7\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + 5\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2\,dx =$

3.A $\pi/48$ — nessuna delle altre affermazioni è esatta **3.B**

3.C $7\pi/48$ — $5\pi/48$ **3.D**

4. *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $f\colon X \mapsto \mathbf{R}$ una funzione tale che per ogni $x_1, x_2 \in X$ valga $\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq d(x_1,x_2)^{1/2}$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

(1) *non possono esserci punti in cui f è continua*

(2) *possono esserci punti in cui f è discontinua*

4.A solo la (2) — solo la (1) **4.B**
4.C entrambe — nessuna **4.D**

5. *Sia I_α l'intervallo su cui è definita la soluzione massimale del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = e^{3x} \\ x(0) = \alpha \end{cases}$. Si ha che $\sup I_\alpha > 4$ se e solo se*

5.A $\alpha > -\ln 12$ — $\alpha < 12$ **5.B**
5.C nessuna delle altre affermazioni è esatta — $\alpha > 0$ **5.D**

6. *Sia $a \in \mathbf{R}$ con $a > 1$ e sia $E_a = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0$ e $\sqrt{x^2+y^2} \in [1,a]\Big\}$. Per quale valore di a vale $\displaystyle\iint_{E_a} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 4$?*

6.A $a = 4$ — $a = 3$ **6.B**
6.C $a = 4\,\pi$ — nessuna delle altre affermazioni è esatta **6.D**

7. *Siano $g \in \mathbf{C^1}(\mathbf{R}\,;\mathbf{R})$ e $f(x,y) = g(x) + g(y)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

(1) *f soddisfa le ipotesi del teorema della funzione inversa (locale) $\forall (x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$*

(2) *$f(x,y) - f(x_o,y_o) = 0$ soddisfa le ipotesi del teorema della funzione implicita $\forall (x_o,y_o) \in \mathbf{R}^2$ con $g'(y_o) \neq 0$*

7.A entrambe — solo la (2) **7.B**
7.C solo la (1) — nessuna **7.D**

8. *Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, sia $f_\alpha\colon \mathbf{R}^{14} \mapsto \mathbf{R}^{14}$ data da $f_\alpha(x) = \|x\|\,(x + \alpha x)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono certamente vera/e?*

(1) $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad f_\alpha$ *è differenziabile su* $\mathbf{R}^{14}$

(2) f_α *è differenziabile su* $\mathbf{R}^{14} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

8.A solo la (1) — nessuna **8.B**
8.C entrambe — solo la (2) **8.D**

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A. 06/07 - Secondo Scritto

Risposte esatte:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Compito A:	B	C	D	D	C	B	B	A