Sistemi di Leggi di Conservazione

Rinaldo M. Colombo
`http://dm.ing.unibs.it/rinaldo`
Dipartimento di Matematica
Brescia

$$\boxed{\boxed{\partial_t u + \partial_x \left[f(u) \right] = 0}}$$

t	$\in$	$[0, +\infty[$	tempo
x	$\in$	$\mathbb{R}^{1}$	spazio
u	$\in$	$\Omega,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	quantità conservate
f	$\in$	$\mathbf{C}^4(\Omega; \mathbb{R}^n)$	flusso

Sistemi di Leggi di Conservazione

1. Preliminari
2. Il Problema di Riemann
3. Il Problema di Cauchy
    - 3.1. Esistenza
    - 3.2. Dipendenza Continua
4. . . . .

Sistemi di Leggi di Conservazione

1. Preliminari
2. Il Problema di Riemann (Lax, 1957)
3. Il Problema di Cauchy
   3.1. Esistenza (Glimm, 1965)
   3.2. Dipendenza Continua (Bressan *et al.*, 1995)
4. . . . .

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. velocità funzione della densità

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. velocità funzione della densità

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto su } [x_1, x_2] \\ \text{al tempo } t_2\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto su } [x_1, x_2] \\ \text{al tempo } t_1\end{array}}$$

$$=$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che entrano} \\ \text{da } x_1 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che escono} \\ \text{da } x_2 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto su } [x_1, x_2] \\ \text{al tempo } t_2\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto su } [x_1, x_2] \\ \text{al tempo } t_1\end{array}}$$

$$=$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che entrano} \\ \text{da } x_1 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che escono} \\ \text{da } x_2 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x)\, dx} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto su } [x_1, x_2] \\ \text{al tempo } t_1\end{array}}$$

$$=$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che entrano} \\ \text{da } x_1 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che escono} \\ \text{da } x_2 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x)\, dx} - \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1, x)\, dx}$$

$$=$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che entrano} \\ \text{da } x_1 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che escono} \\ \text{da } x_2 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x)\, dx} - \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1, x)\, dx}$$

$$=$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\rho\, v)(t, x_1)\, dx} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Auto che escono}\\ \text{da } x_2 \text{ su } [t_1, t_2]\end{array}}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x)\, dx} - \boxed{\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1, x)\, dx}$$

$$=$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\rho\, v)(t, x_1)\, dx} - \boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\rho\, v)(t, x_2)\, dx}$$

Traffico Stradale (Lighthill–Whitham, 1955; Richards, 1956)

1. nè entrate nè uscite
2. $v = v(\rho)$

- $\rho =$ densità media
- $v =$ velocità media

$$\boxed{\boxed{\partial_t \rho + \partial_x \left[\rho \cdot v(\rho)\right] = 0}}$$

Modello LWR

Termodinamica dei Gas (Eulero 1755)

- conservazione della massa
- conservazione della quantità di moto
- conservazione dell'energia

Termodinamica dei Gas (Eulero 1755)

Coordinate euleriane:

$$\begin{cases} \partial_t \rho & + \quad \partial_x(\rho v) & = 0 \\ \partial_t (\rho v) & + \quad \partial_x \left(\rho v^2 + p\right) & = 0 \\ \partial_t \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right) & + \quad \partial_x \left[v \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p\right)\right] & = 0 \end{cases}$$

ρ densità di massa

v velocità

p pressione

e densità di energia interna

Termodinamica dei Gas (Eulero 1755)

Coordinate euleriane:

$$\begin{cases} \partial_t \rho & + \quad \partial_x(\rho v) & = 0 \\ \partial_t (\rho v) & + \quad \partial_x \left(\rho v^2 + p\right) & = 0 \\ \partial_t \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right) & + \quad \partial_x \left[v \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p\right)\right] & = 0 \end{cases}$$

ρ densità di massa

v velocità

p pressione

e densità di energia interna

\+ Equazione di Stato

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left[f(u) \right] = 0 \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

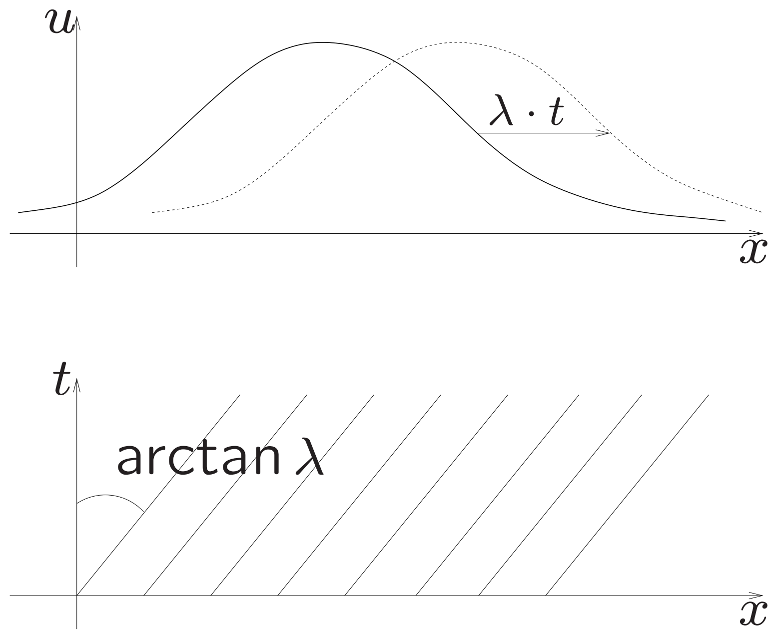
Lineare & Scalare:

$f(u) = \lambda \cdot u \qquad \partial_t u + \lambda \, \partial_x u = 0$

$D_v f = 0$ con $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$

$u(t,x) = u_o(x - \lambda \cdot t)$

$\lambda =$ velocità caratteristica



$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left[f(u) \right] = 0 \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

Lineare & Sistema:

$f(u) = A \cdot u \qquad \partial_t u + A\,\partial_x u = 0$

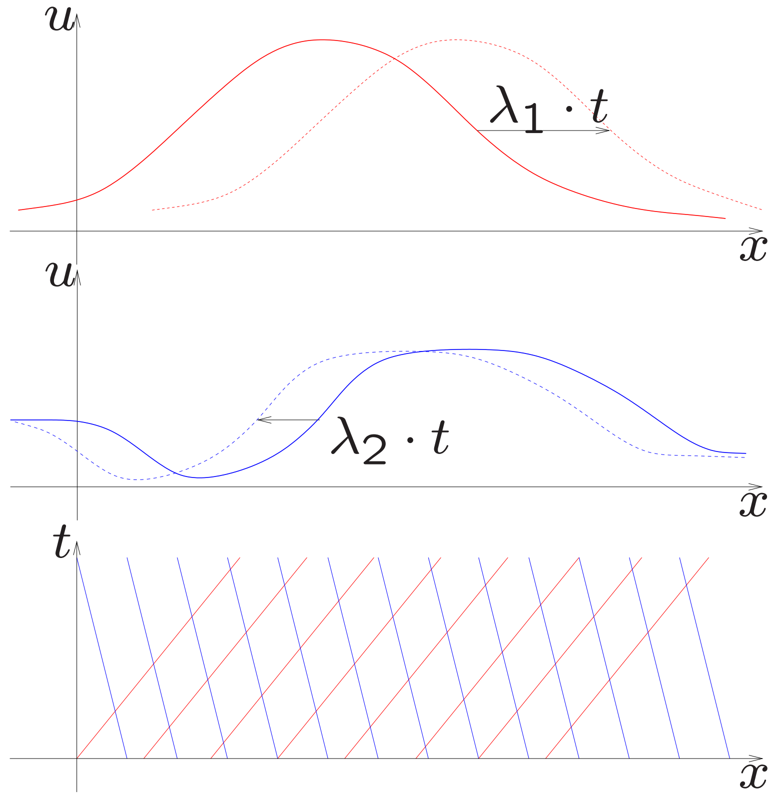
Se $\boxed{\color{red}{A \text{ iperbolica}}}$

$u = Rv$ con $R^{-1}AR$ diagonale

$$\partial_t v_i + \lambda_i \cdot \partial_x v_i = 0$$

$$v_i(t,x) = (v_o)_i(x - \lambda \cdot t)$$

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} (v_o)_i(x - \lambda \cdot t) \cdot r_i$$



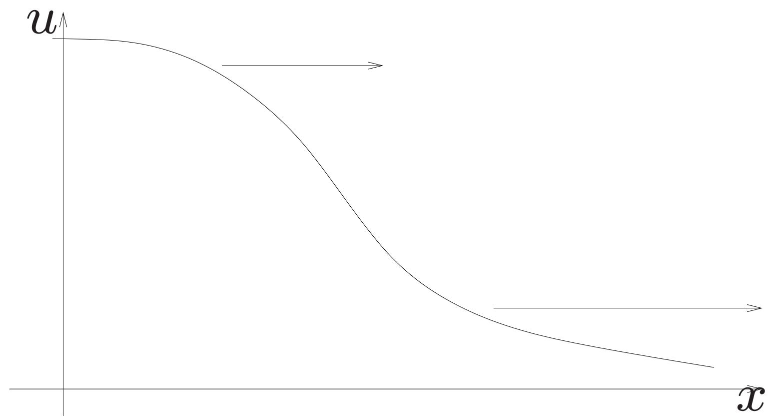
Scalare non Lineare

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

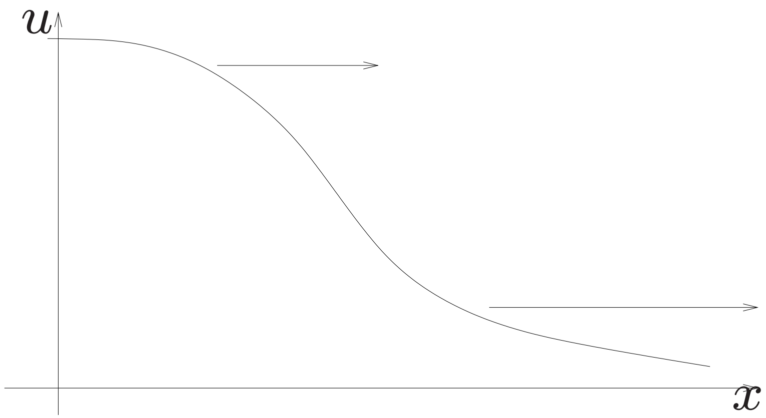
Scalare non Lineare

$$\partial_t u + \lambda(u) \cdot \partial_x u = 0$$

Scalare non Lineare

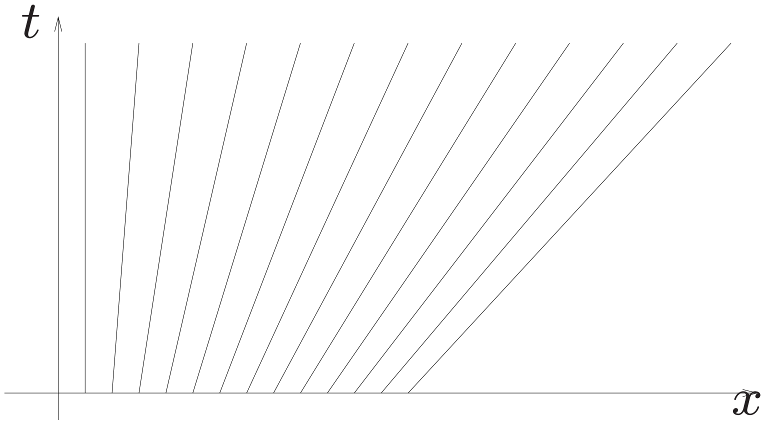


Scalare non Lineare



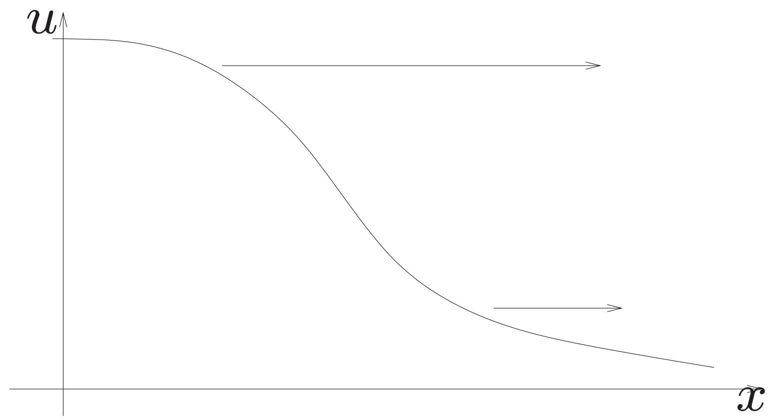
Tutto regolare.

Scalare non Lineare

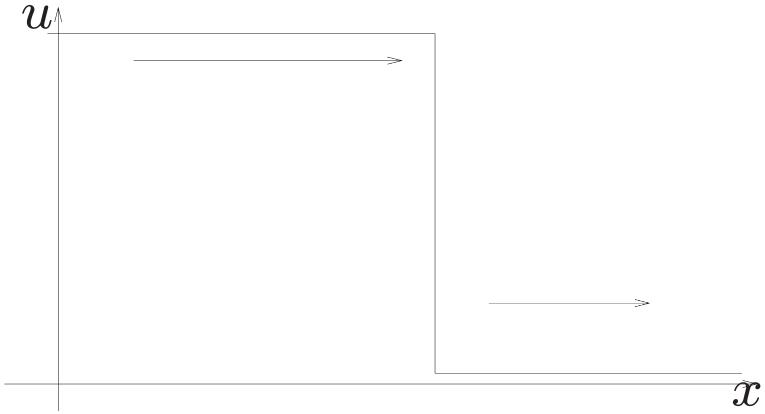


Tutto regolare.

Scalare non Lineare

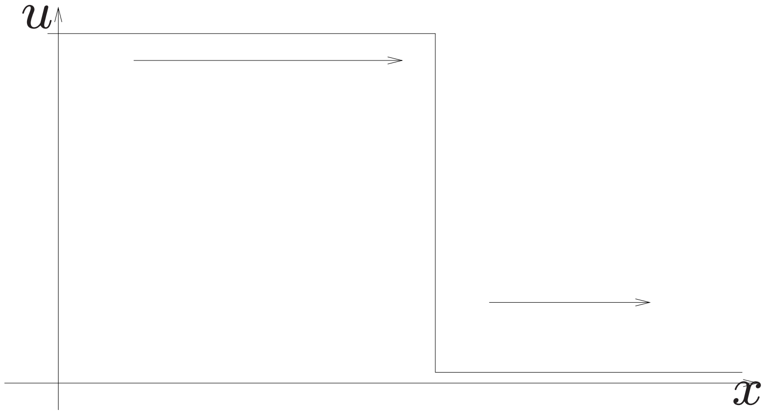


Scalare non Lineare



$\boxed{\boxed{\text{Shock!}}}$

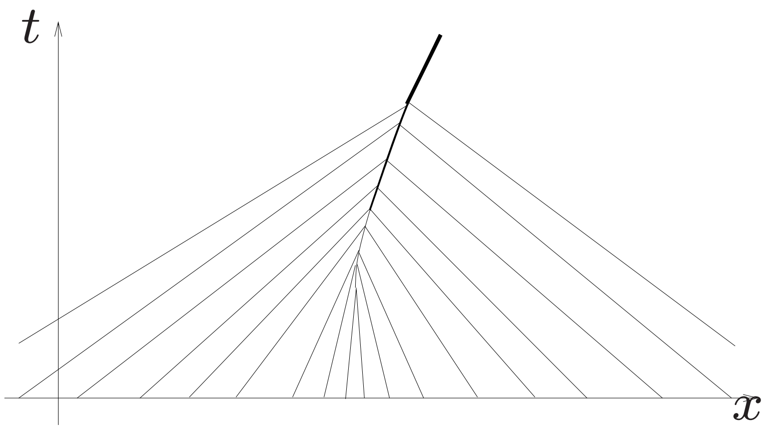
Scalare non Lineare



$$\boxed{\boxed{\text{Shock!}}}$$

Catastrofe del gradiente – Discontinuità a salto

Scalare non Lineare



$\boxed{\boxed{\text{Shock!}}}$

Catastrofe del gradiente – Discontinuità a salto

Sistema non Lineare

$=$ Scalare Non Lineare

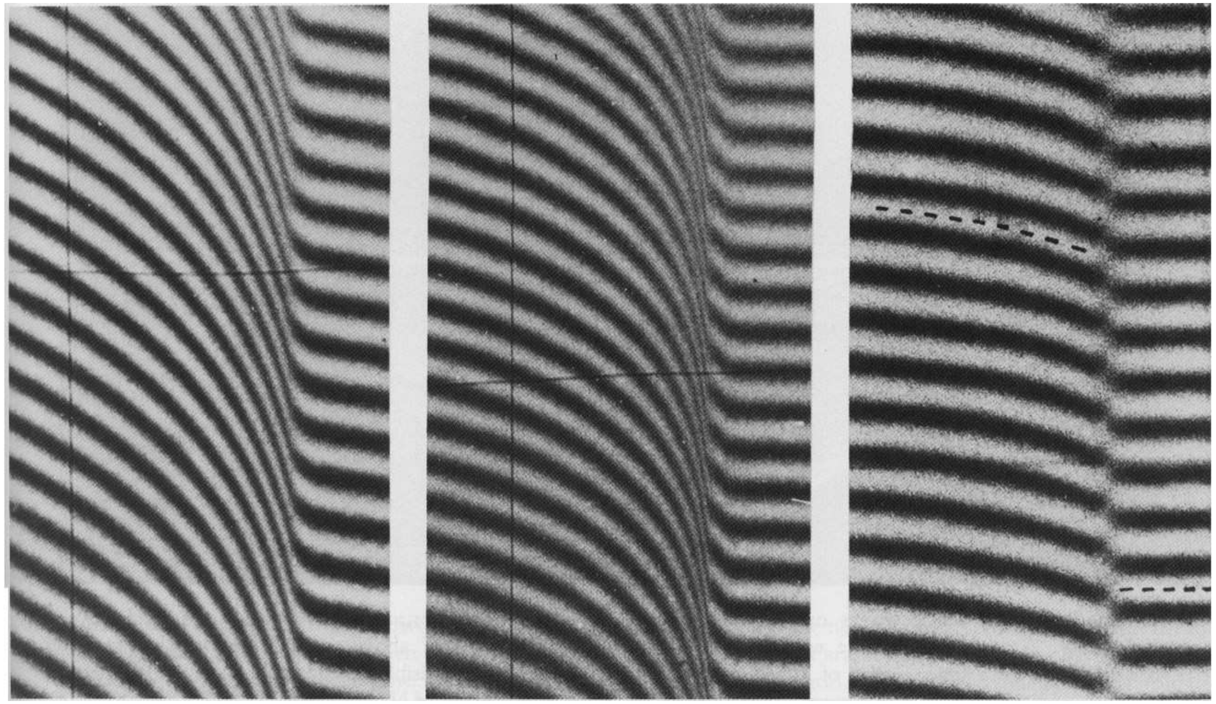
Sistema non Lineare

$=$ Scalare Non Lineare

$+$ $\boxed{\boxed{\text{Interazioni tra Discontinuità}}}$

Discontinuità: senso fisico?

Discontinuità: senso fisico?



Discontinuità: senso fisico?

Discontinuità: formulazione?

Discontinuità: formulazione?

Differenziale:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

Discontinuità: formulazione?

Differenziale:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u(t_2, x) - u(t_1, x)]\ dx = \int_{t_1}^{t_2} \Big[f\ (u(t, x_1)) - f\ (u(t, x_2))\Big]\ dt$$

Discontinuità: formulazione?

Differenziale:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u(t_2, x) - u(t_1, x)] \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \Big[f\left(u(t, x_1)\right) - f\left(u(t, x_2)\right) \Big] \, dt$$

Debole:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \Big[u(t,x)\, \partial_t \varphi(t,x) + f\left(u(t,x)\right) \partial_x \varphi(t,x) \Big] \, dx \, dt = 0$$

Discontinuità: selezione?

Discontinuità: selezione?

Qualunque formulazione

$$\Longrightarrow$$

condizioni di

$$\boxed{\boxed{\text{Rankine-Hugoniot}}}$$

Discontinuità: selezione?

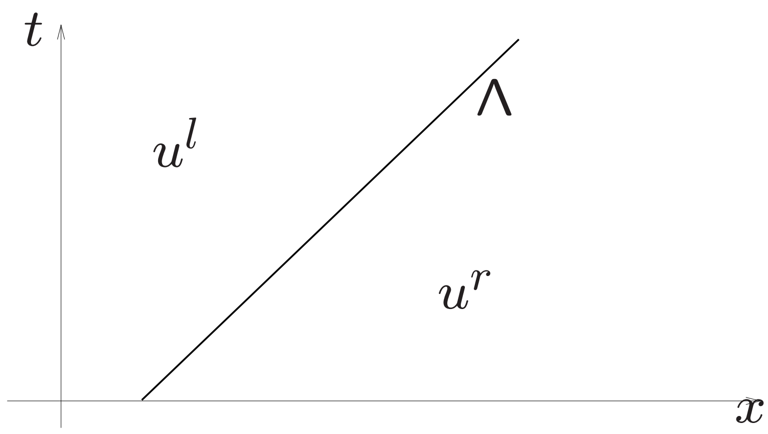
Qualunque formulazione

$\Longrightarrow$

condizioni di

$\boxed{\boxed{\text{Rankine-Hugoniot}}}$

$$f(u^l) - f(u^r) = \Lambda \cdot (u^l - u^r)$$



Discontinuità: selezione?

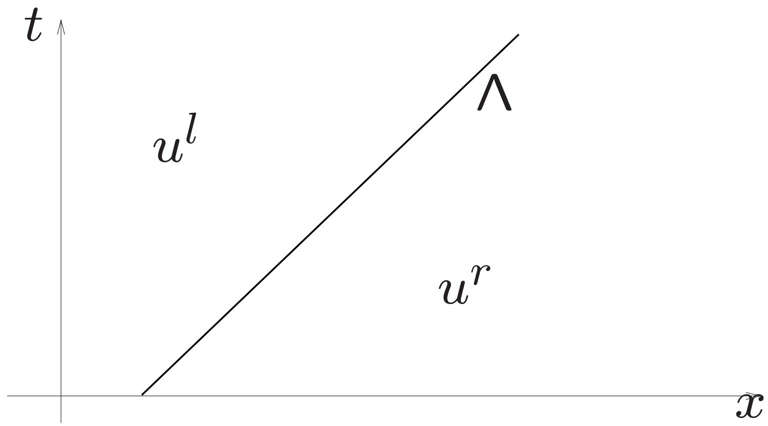
Qualunque formulazione

$\Longrightarrow$

condizioni di

$\boxed{\boxed{\text{Rankine-Hugoniot}}}$

$$f(u^l) - f(u^r) = \Lambda \cdot (u^l - u^r)$$



$\boxed{\boxed{\text{Non Basta!}}}$

Discontinuità: selezione?

Discontinuità: selezione?

Viscosità

Discontinuità: selezione?

Viscosità

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \, \partial^2_{xx} u$$

Discontinuità: selezione?

Viscosità

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon\, \partial_{xx}^2 u$$

$\varepsilon \to 0 \iff$ Vanishing Viscosity

Discontinuità: selezione?

Viscosità

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon\, \partial^2_{xx} u$$

$\varepsilon \to 0 \iff$ Vanishing Viscosity

(Lax, 1957; ... Kružkov, 1970; ... Bianchini & Bressan, 2005; ...)

Discontinuità: selezione?

Entropia

Discontinuità: selezione?

Entropia

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) \leq 0$$

$\eta =$ entropia (convessa); $q =$ flusso dell'entropia

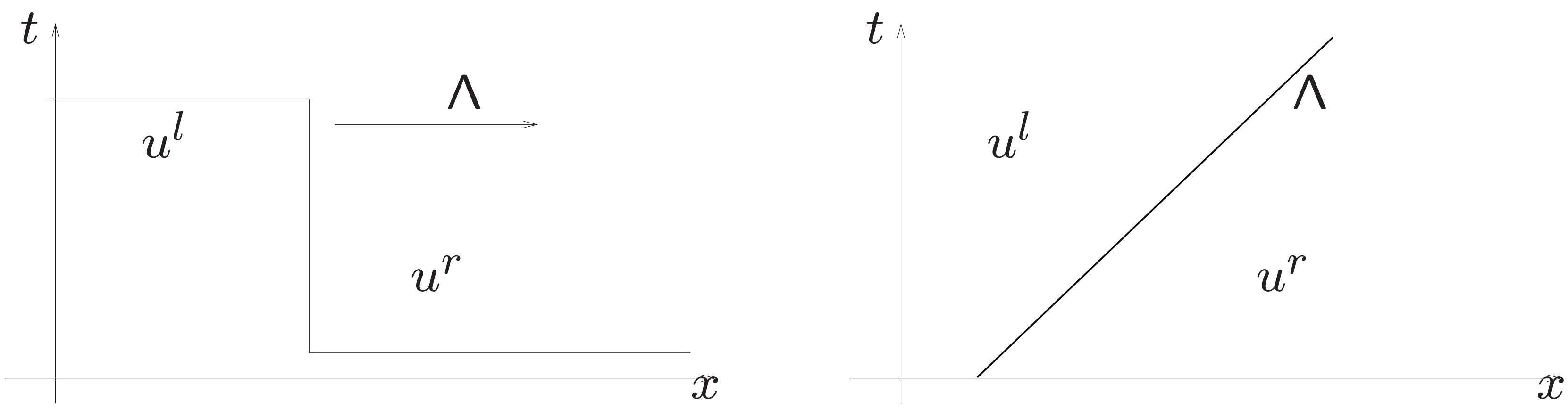
$$\int_{x_1}^{x_2} \Big[\eta\left(u(t_2, x)\right) - \eta\left(u(t_1, x)\right)\Big]\, dx \geq \int_{t_1}^{t_2} \Big[q\left(u(t, x_1)\right) - q\left(u(t, x_2)\right)\Big]\, dt$$

Discontinuità: selezione?

Stabilità

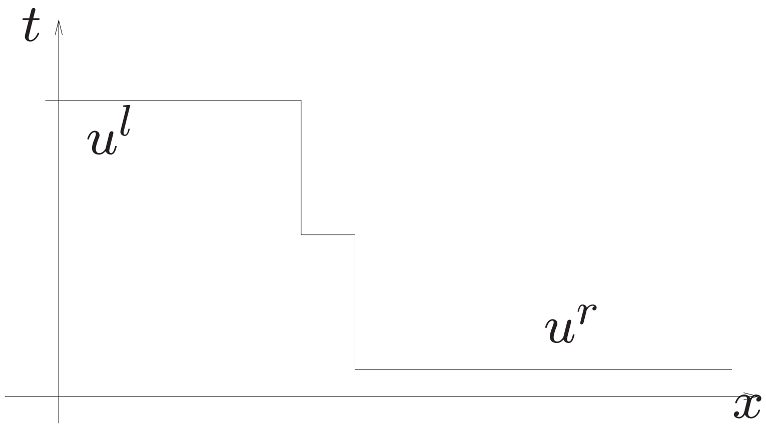
Discontinuità: selezione?

Stabilità



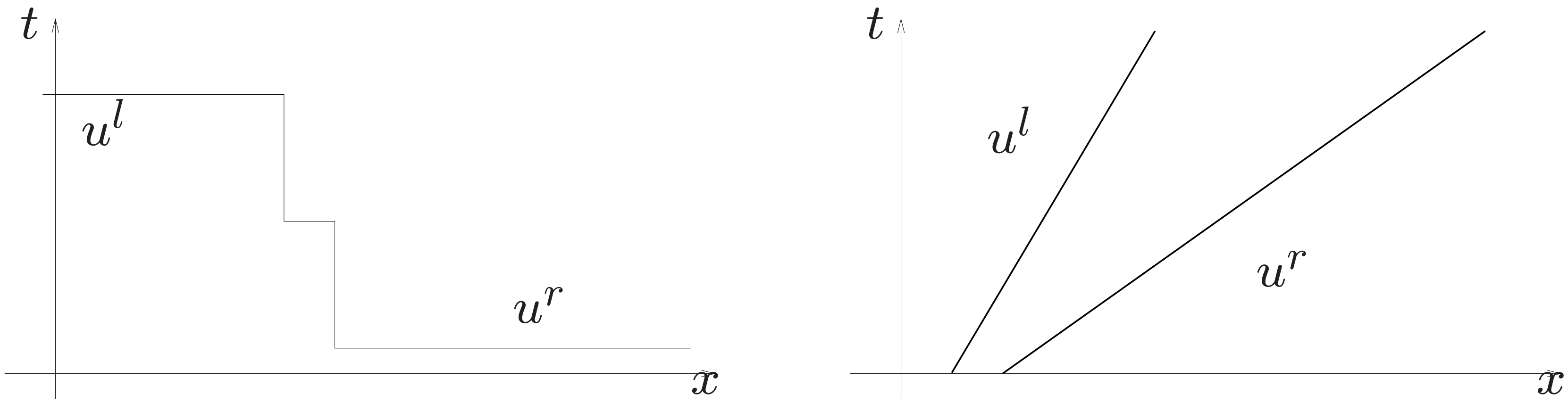
Discontinuità: selezione?

Stabilità



Discontinuità: selezione?

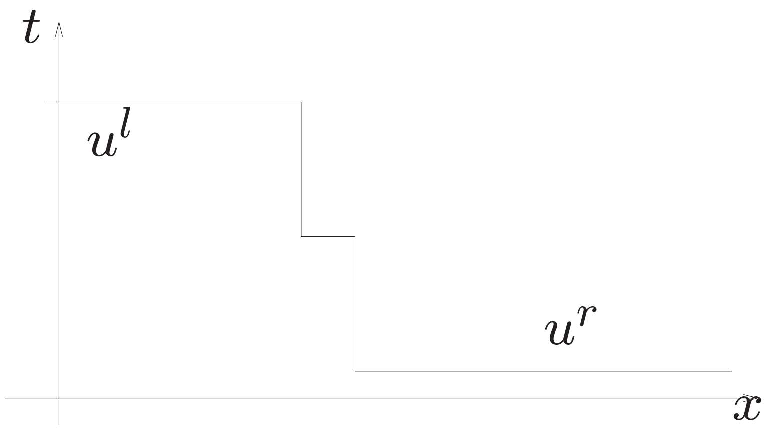
Stabilità

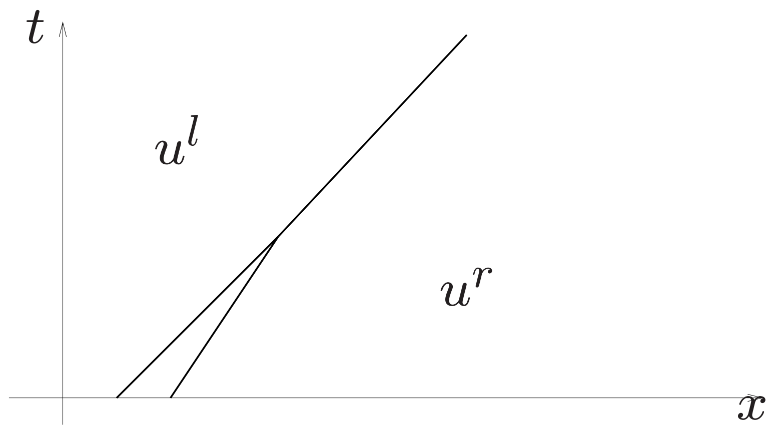


NO!

Discontinuità: selezione?

Stabilità

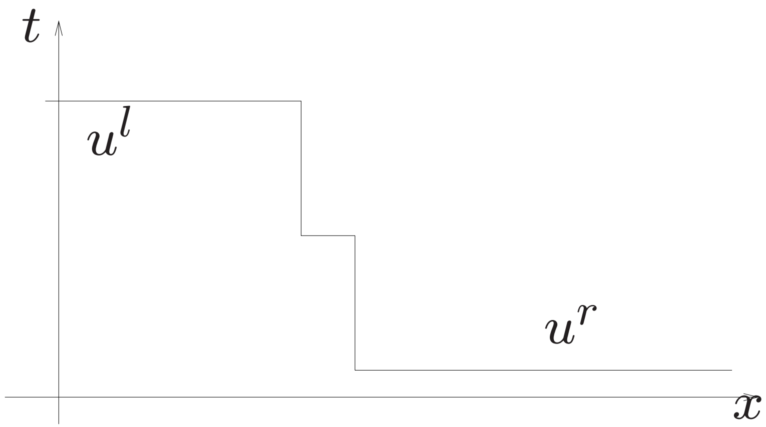


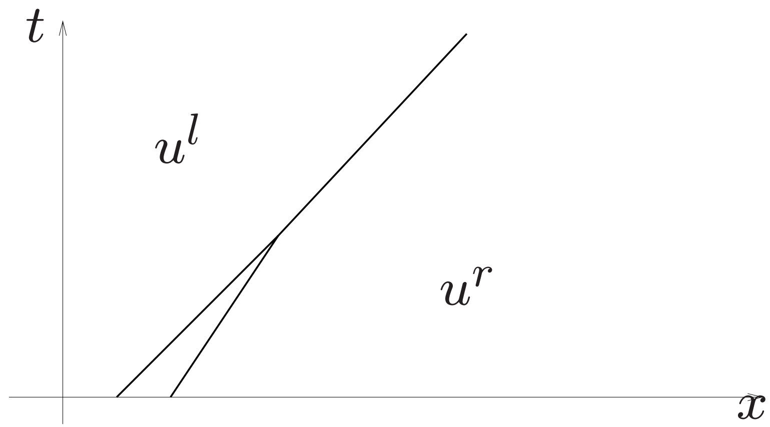


SI!

Discontinuità: selezione?

Stabilità



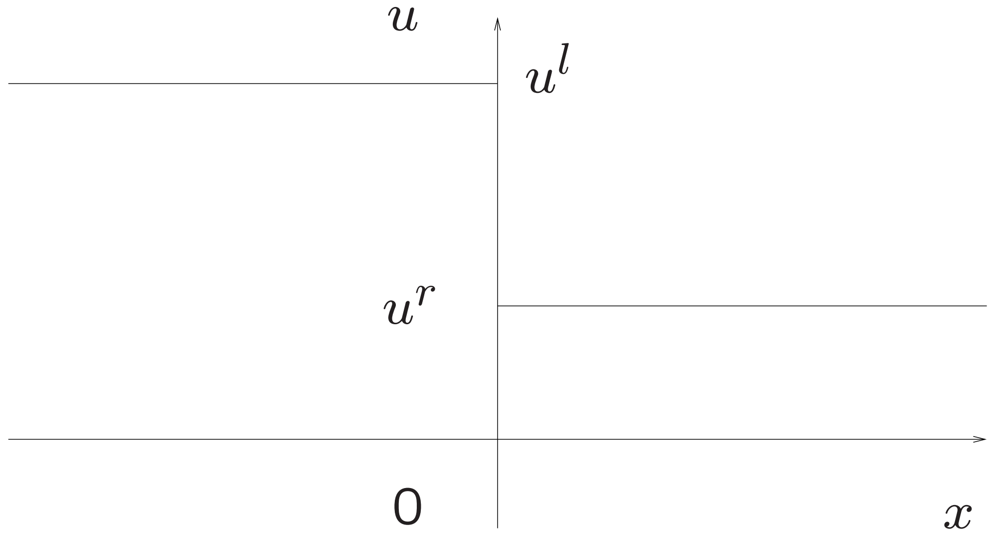


SI!

Stabilità alla Lax: $\boxed{\boxed{\lambda(u^l) > \Lambda > \lambda(u^r)}}$

Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$

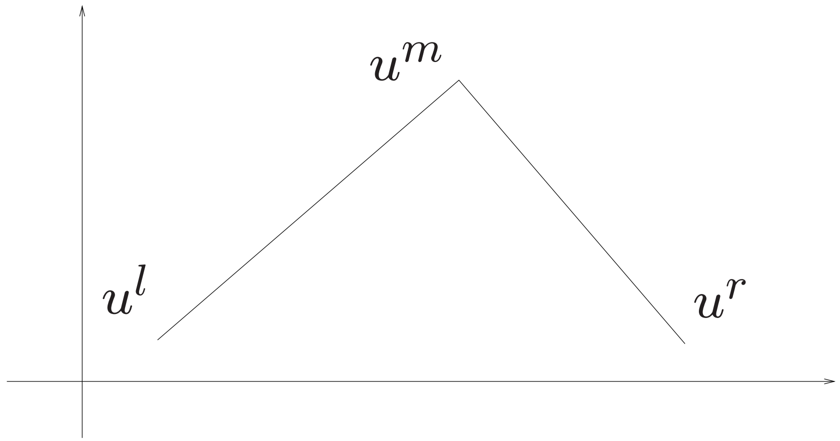
Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l \text{ se } x < 0 \\ u^r \text{ se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$



$(n = 2,\ u \in \mathbb{R}^2)$

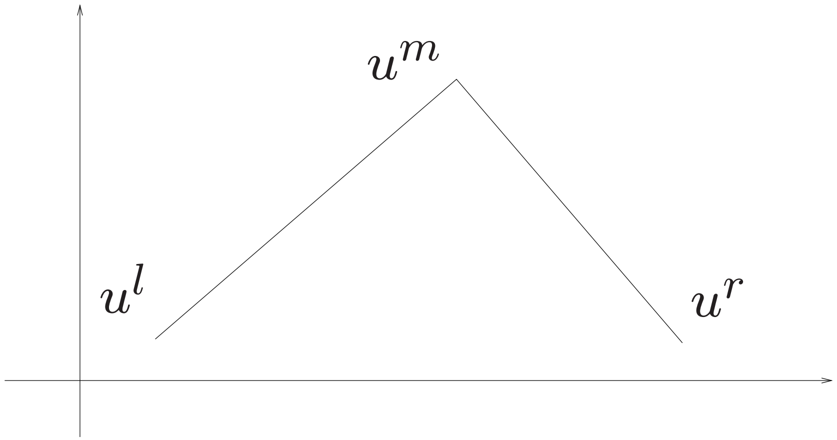
$$\text{Il Problema di Riemann: } \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Lineare



Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$

Lineare



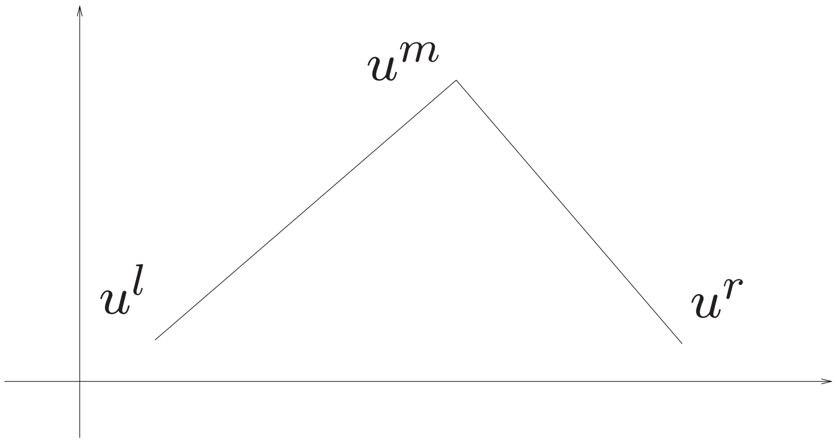
$A = Df(u)$ costante

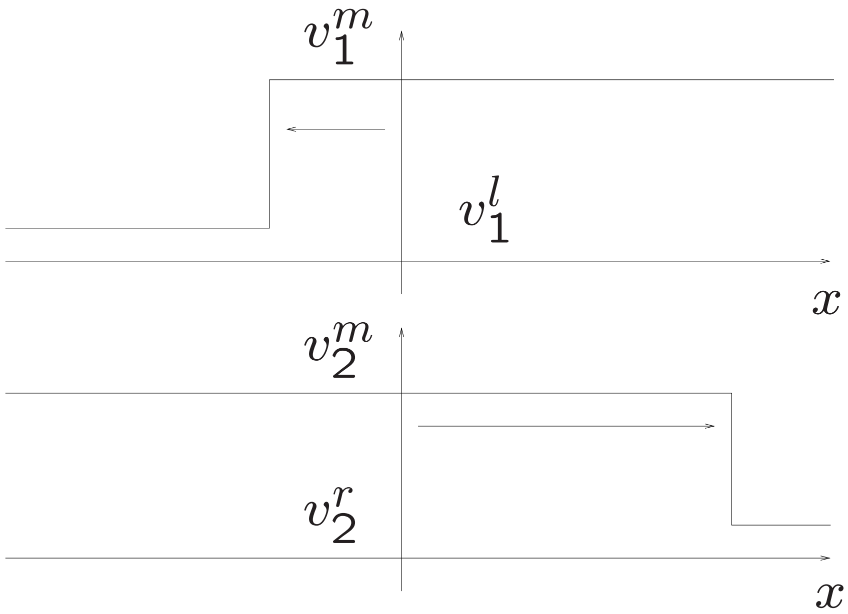
r_i autovettore destro di A

λ_i velocità caratteristica

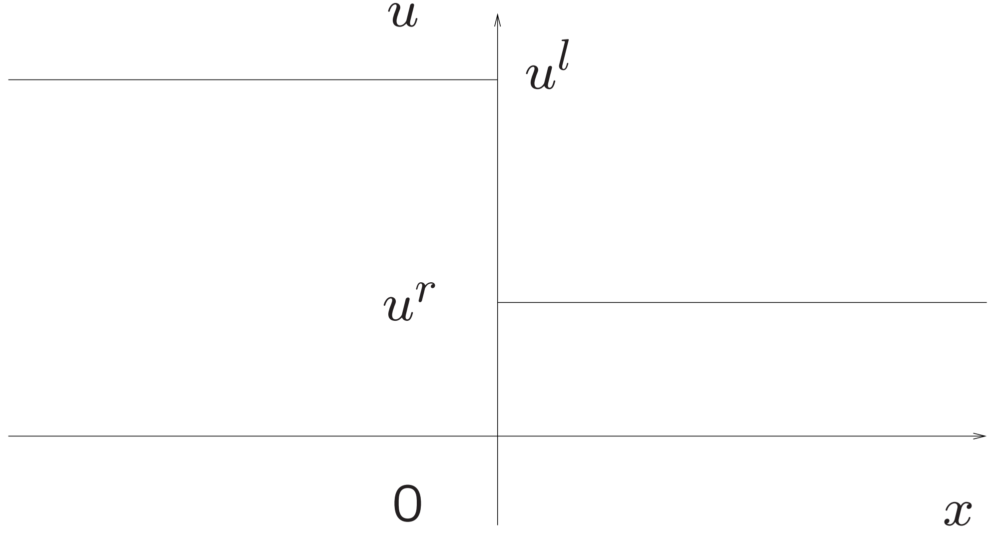
$$\text{Il Problema di Riemann: } \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l \text{ se } x < 0 \\ u^r \text{ se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Lineare





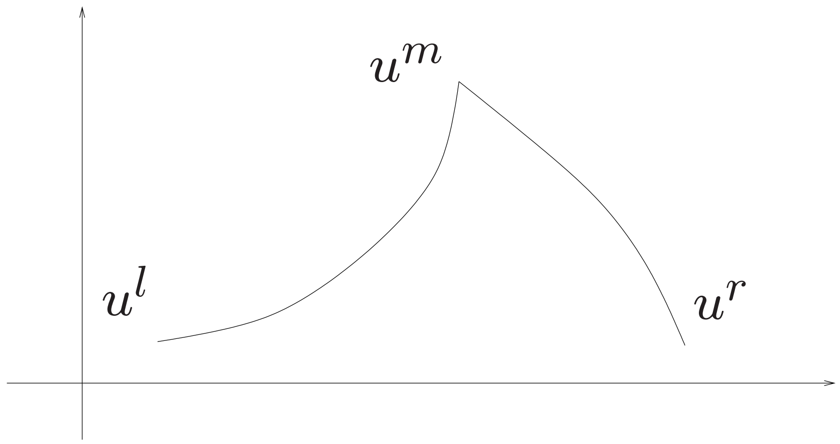
Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$



NON lineare

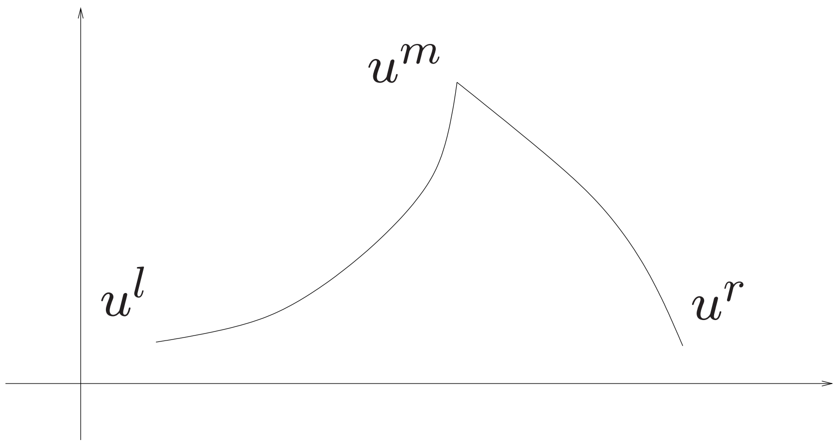
Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$

NON Lineare



Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$

NON Lineare



$Df(u)$ iperbolica

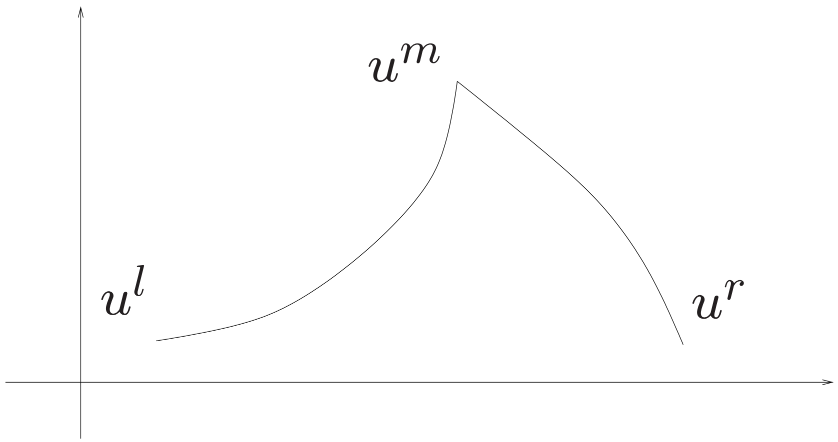
Teorema della Funzione Implicita

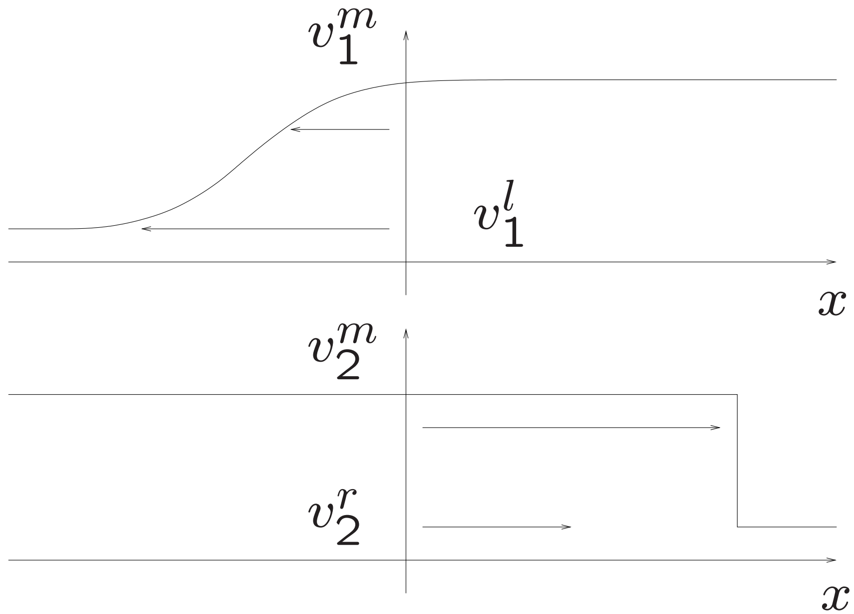
"*Diagonalizzazione*" locale

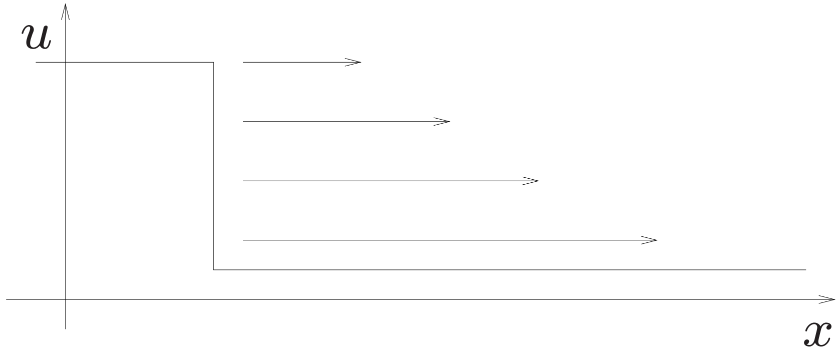
Curve di Lax

Il Problema di Riemann: $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$

NON Lineare



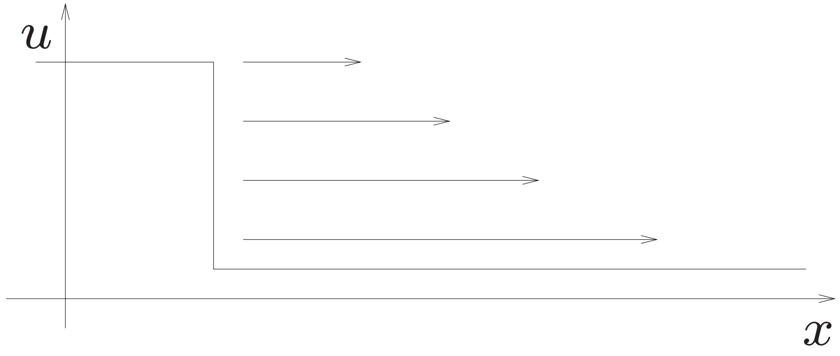




Rarefazione

λ_i cresce

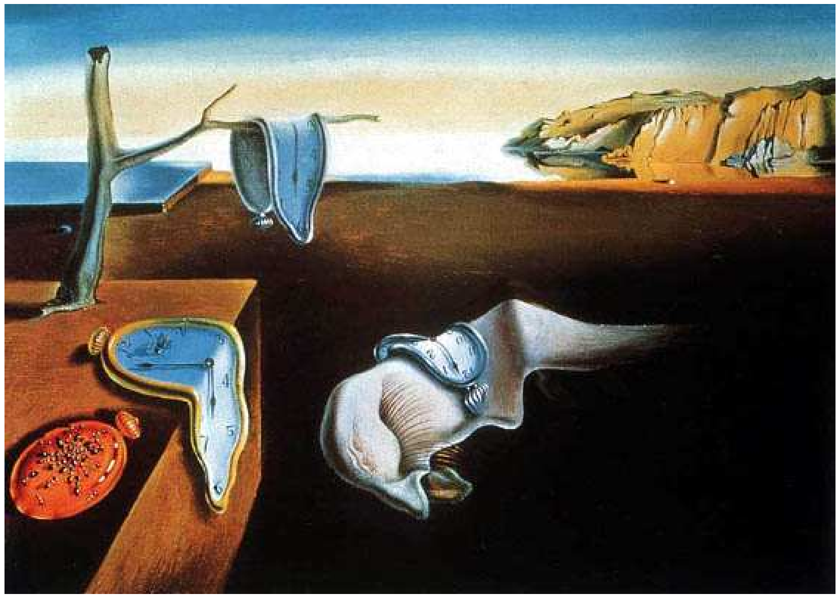
$\nabla\lambda_i \cdot r_i > 0$

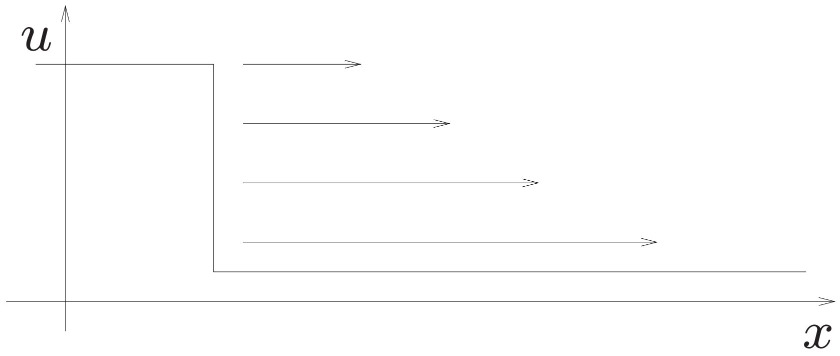


Rarefazione

λ_i cresce

$\nabla \lambda_i \cdot r_i > 0$

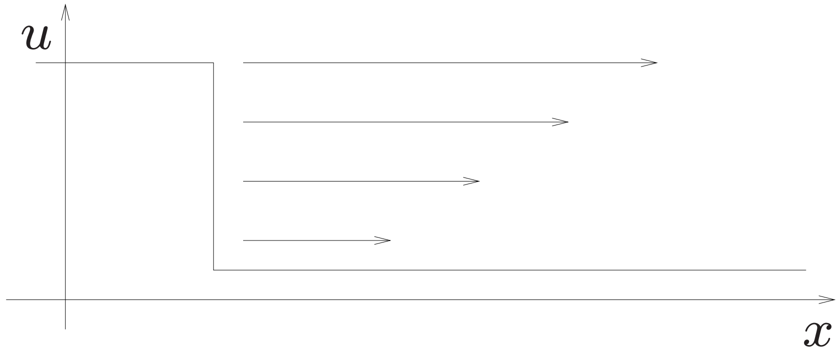




Rarefazione

λ_i cresce

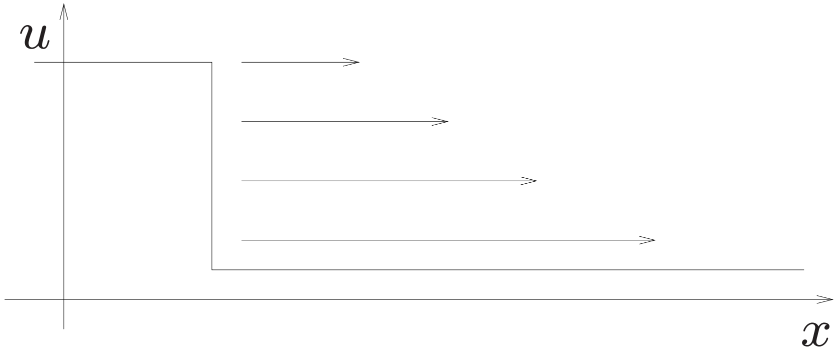
$\nabla \lambda_i \cdot r_i > 0$



Shock

λ_i decresce

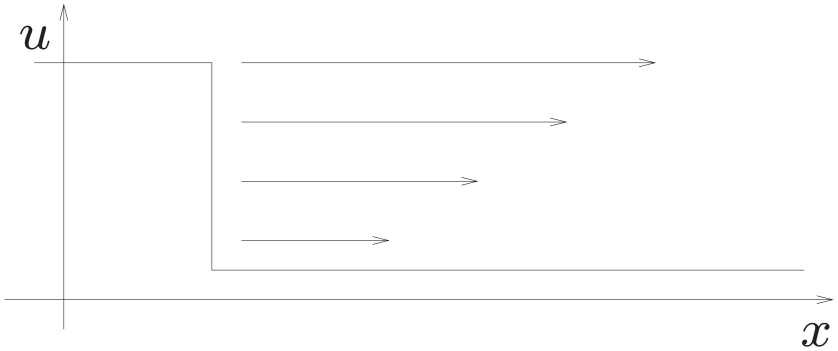
$\nabla \lambda_i \cdot r_i < 0$



Rarefazione

λ_i cresce

$\nabla\lambda_i \cdot r_i > 0$

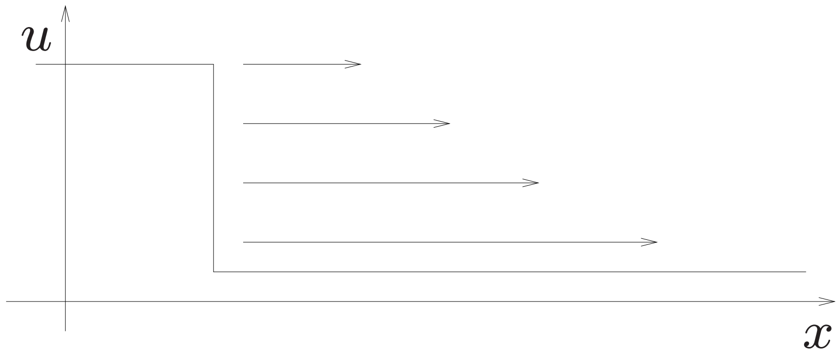


Shock

λ_i decresce

$\nabla\lambda_i \cdot r_i < 0$

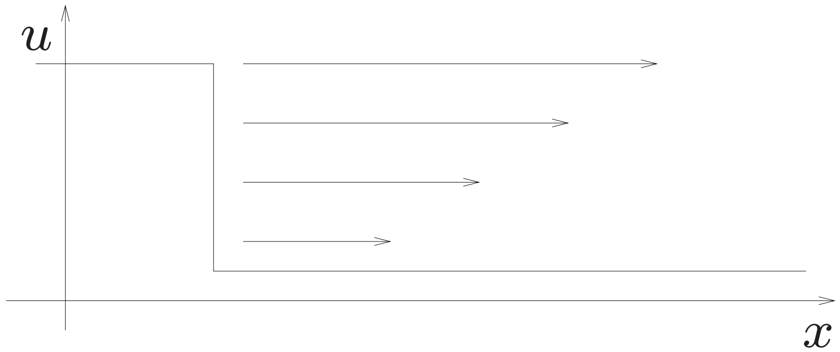
Gli shocks dissipano entropia!



Rarefazione

λ_i cresce

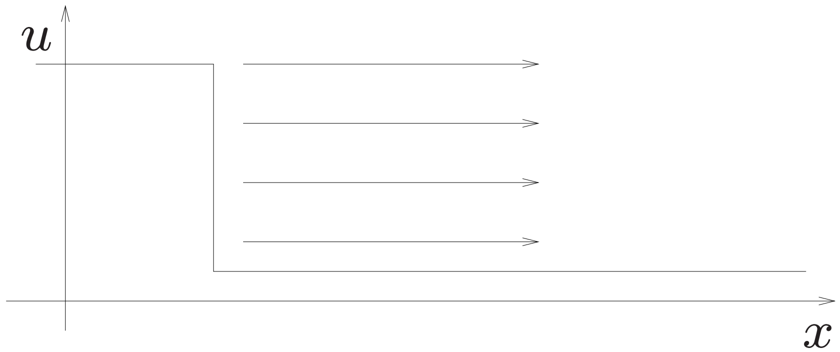
$\nabla\lambda_i \cdot r_i > 0$



Shock

λ_i decresce

$\nabla\lambda_i \cdot r_i < 0$



Discontinuità di contatto

λ_i costante

$\nabla\lambda_i \cdot r_i = 0$

$$\text{Il Problema di Riemann} \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < 0 \\ u^r & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $u_o \in \mathring{\Omega}$; $f \in \mathbf{C}^4(\Omega; \mathbb{R}^n)$; $Df(u_o)$ iperbolica;

$\nabla\lambda_i(u_o) \cdot r_i(u_o) \neq 0$ oppure $\nabla\lambda_j(u) \cdot r_j(u) \equiv 0$

$$\Downarrow$$

$\exists\delta > 0$ tale che $\forall u^l, u^r$ con $\left\| u^l - u_o \right\| + \| u^r - u_o \| < \delta$

il Problema di Riemann ammette un'unica soluzione $\mathcal{R}(u^l, u^r)$

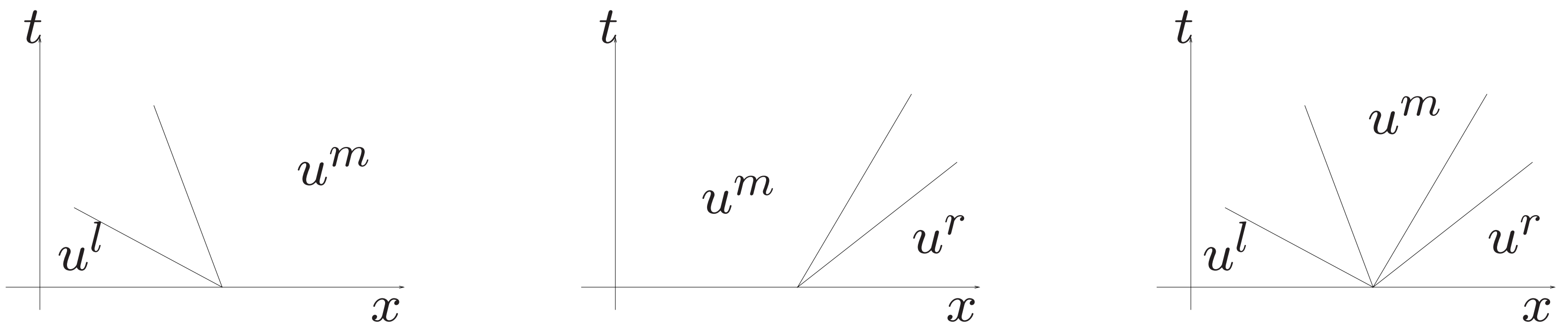
autosimile e costituita da (al più) $n+1$ stati separati da n onde:

rarefazioni, shocks entropici o discontinuità di contatto.

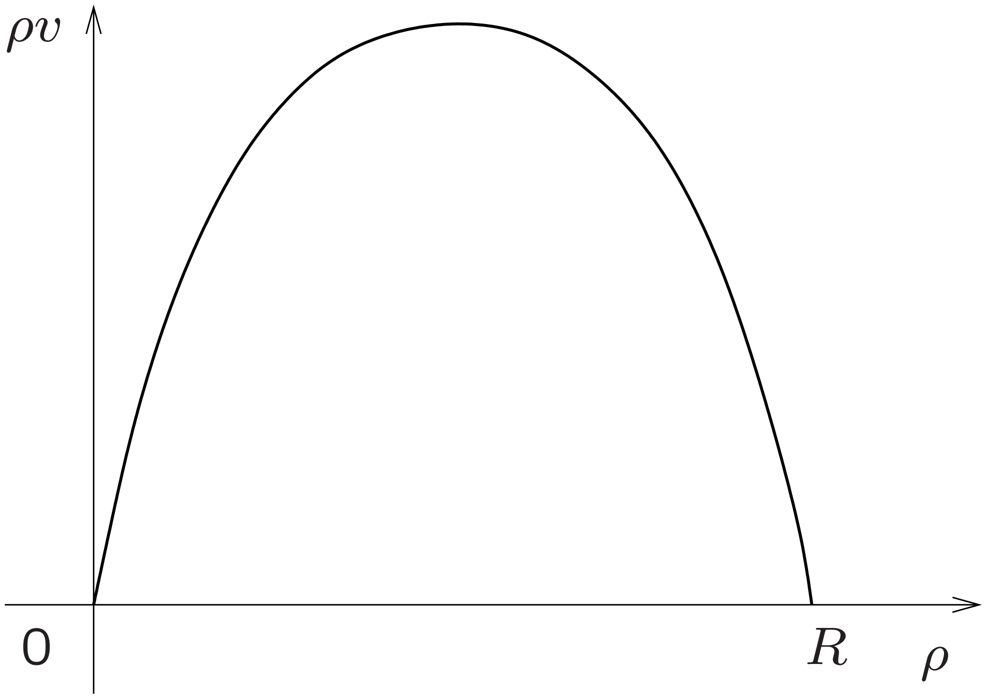
$\mathcal{R}$ è consistente:

(1) $$\left.\begin{array}{l}\mathcal{R}(u^l,u^m)(\bar{x}) = u^m\\ \mathcal{R}(u^m,u^r)(\bar{x}) = u^m\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathcal{R}(u^l,u^r) = \begin{cases}\mathcal{R}(u^l,u^m)\,, & \text{se } x < \bar{x}\,,\\ \mathcal{R}(u^m,u^r)\,, & \text{se } x \geq \bar{x}\,,\end{cases}$$

(2) $$\mathcal{R}(u^l,u^r)(\bar{x}) = u^m \quad \Rightarrow \begin{cases}\mathcal{R}(u^l,u^m) = \begin{cases}\mathcal{R}(u^l,u^r)\,, & \text{se } x \leq \bar{x}\,,\\ u^m\,, & \text{se } x > \bar{x}\,,\end{cases}\\ \mathcal{R}(u^m,u^r) = \begin{cases}u^m\,, & \text{se } x < \bar{x}\,,\\ \mathcal{R}(u^l,u^r)\,, & \text{se } x \geq \bar{x}\,.\end{cases}\end{cases}$$



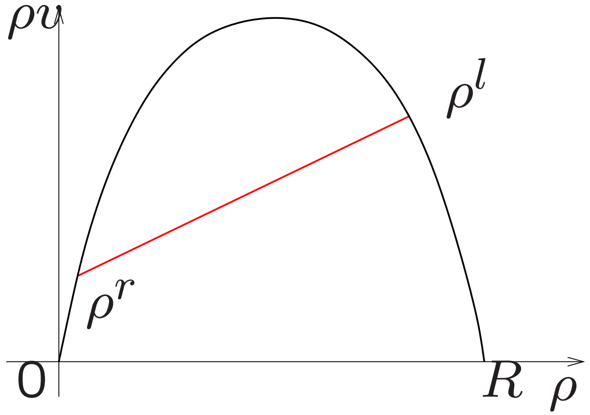
Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho\, v(\rho)\right) = 0$



$$
\begin{aligned}
R &> 0 \text{ densità max.}\\
V &> 0 \text{ velocità max.}\\
v &= (1 - \rho/R)\, V\\
\rho\, v &= (1 - \rho/R)\, \rho V\\
\lambda &= (1 - 2\rho/R)\, V\\
r &= -1\\
\nabla\lambda \cdot r &= 2/R
\end{aligned}
$$

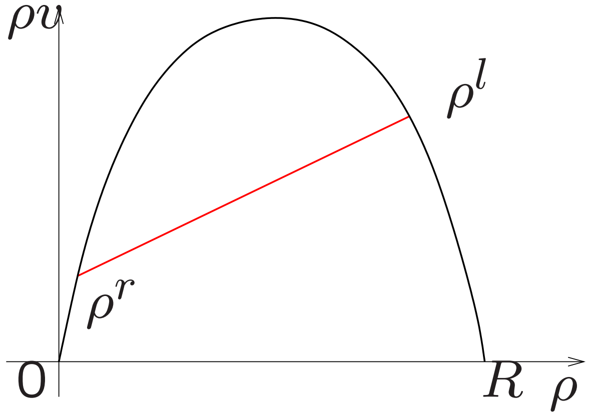
Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho)) = 0$

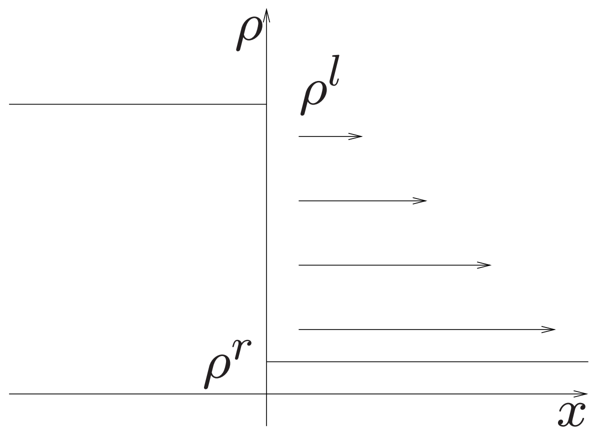
$$\rho^l > \rho^r, \qquad v(\rho^l) < v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) < \lambda(\rho^r)$$



Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho)) = 0$

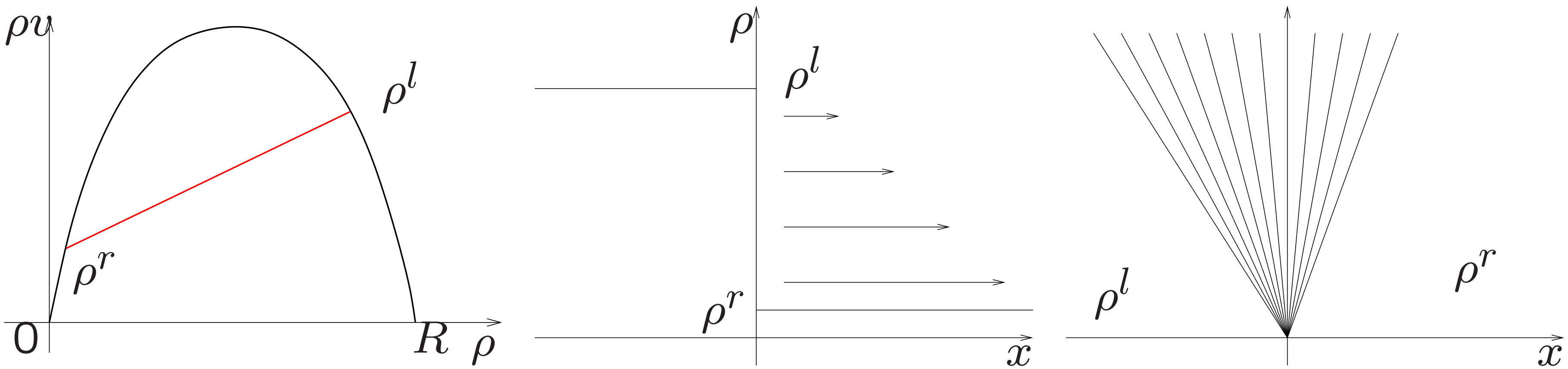
$$\rho^l > \rho^r, \qquad v(\rho^l) < v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) < \lambda(\rho^r)$$





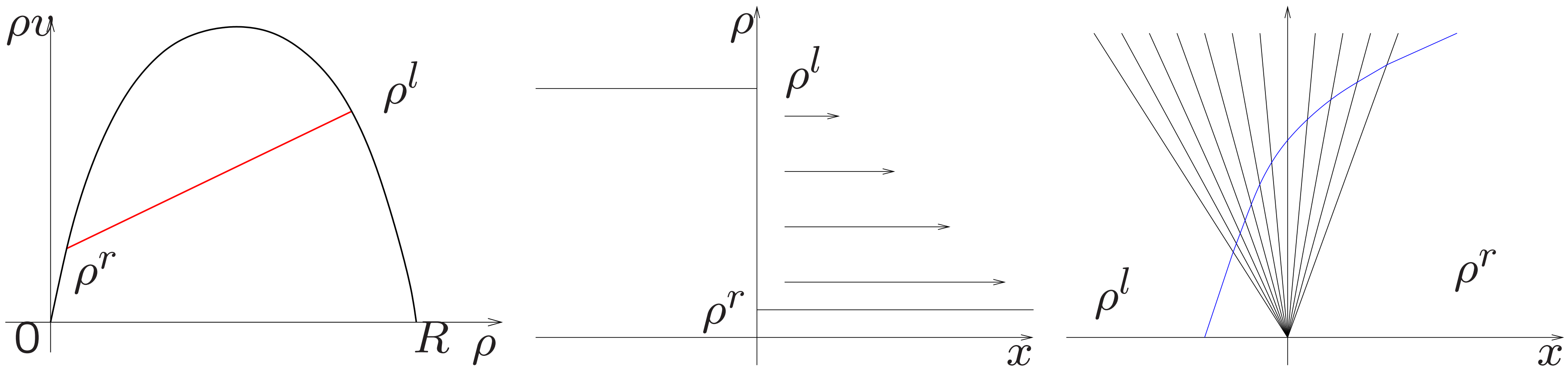
Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho\, v(\rho)\right) = 0$

$$\rho^l > \rho^r, \qquad v(\rho^l) < v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) < \lambda(\rho^r)$$



Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho\, v(\rho)\right) = 0$

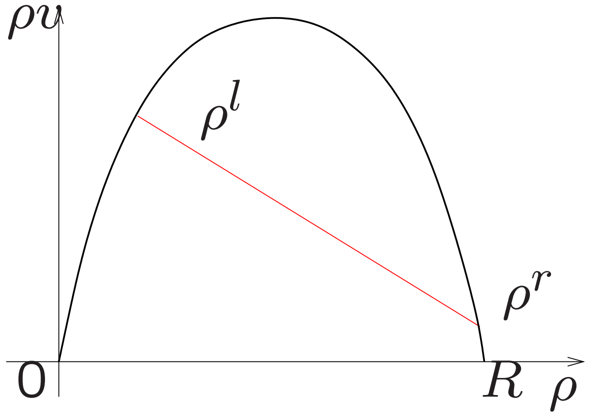
$$\rho^l > \rho^r, \qquad v(\rho^l) < v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) < \lambda(\rho^r)$$



$$\dot{x} = v\left(\rho(t,x)\right)$$

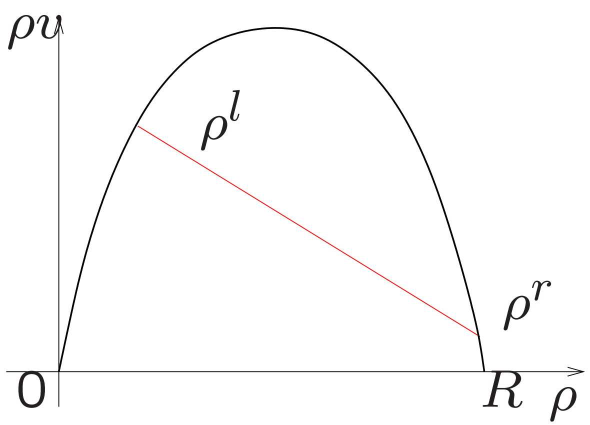
Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho\, v(\rho)\right) = 0$

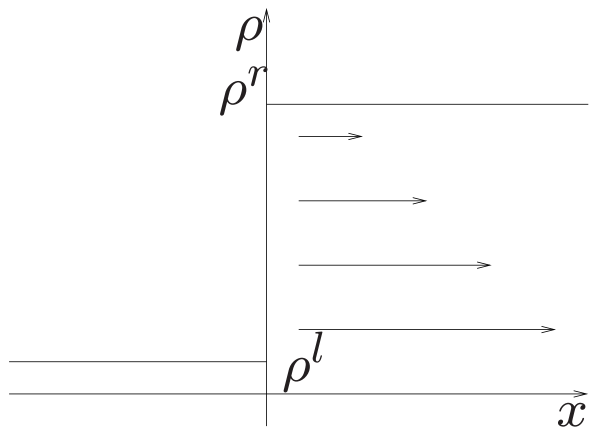
$$\rho^l < \rho^r, \qquad v(\rho^l) > v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) > \lambda(\rho^r)$$



Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho)) = 0$

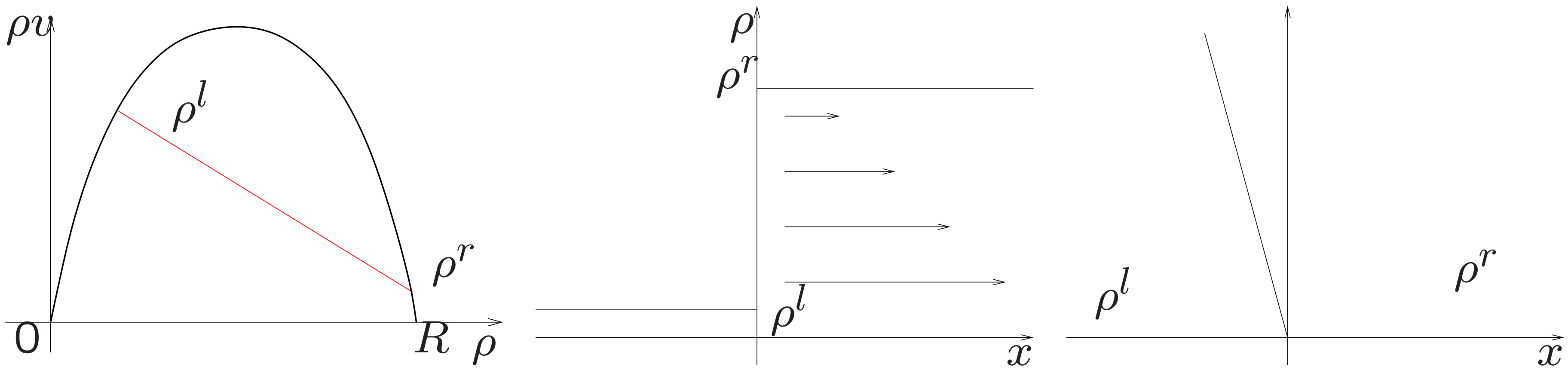
$$\rho^l < \rho^r, \qquad v(\rho^l) > v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) > \lambda(\rho^r)$$





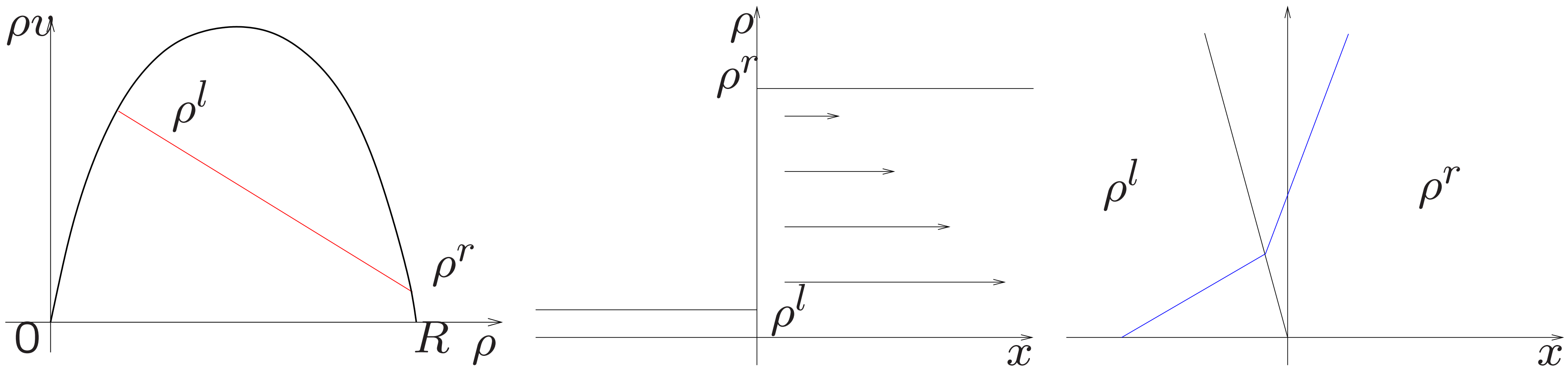
Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho)) = 0$

$$\rho^l < \rho^r, \qquad v(\rho^l) > v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) > \lambda(\rho^r)$$



Il Problema di Riemann per il modello LWR: $\partial_t \rho + \partial_x \left(\rho\, v(\rho)\right) = 0$

$$\rho^l < \rho^r, \qquad v(\rho^l) > v(\rho^r), \qquad \lambda(\rho^l) > \lambda(\rho^r)$$



$$\dot{x} = v\left(\rho(t,x)\right)$$

Il p-sistema

Coordinate Lagrangiane: $\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x p(\tau) = 0 \end{cases}$ τ volume specifico, v velocità

Coordinate Euleriane: $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho) \right) = 0 \end{cases}$ ρ densità, q quantità di moto, p pressione

Il Problema di Cauchy

Il Problema di Cauchy

Wave Front Tracking

Il Problema di Cauchy

Wave Front Tracking

Esistenza $\div$ Dipendenza Continua

Esistenza:

Scopo:	Costruire una soluzione approssimata
Ingredienti:	Riemann Solver Velocità di propagazione finita
Strumenti:	Funzioni costanti a tratti Stime sulla TV

Dipendenza Continua:

Scopo:	Costruire un semigruppo approssimato
Ingredienti:	Riemann Solver Velocità di propagazione finita
Strumenti:	Funzioni costanti a tratti Stime sulla TV Distanza *ad hoc*