Analisi Matematica C
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2004/2005 – Quarto Scritto

Matricola: | | | | | | |

Cognome:.. Nome:...

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Risposta:										

Per ognuna delle 10 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 3 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/4. Per ogni risposta non data 0.

1. *Sia* $f\colon \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ *di classe* $\mathbf{C^1}$ *su* $\mathbf{R}^3$, $f \equiv (f_x, f_y, f_z)$. *Quale della seguenti implicazioni è vera?*

1.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta

1.B $f_x = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} f$ ha direzione costante

1.C f non dipende da $z \Rightarrow \operatorname{rot} f$ è parallelo a $\vec{i}$

1.D $\operatorname{rot} f$ è parallelo a $\vec{k} \Rightarrow f_z = 0$

2. *Si consideri la serie di funzioni* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{nx^2}}{4\sqrt{n}}$. *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

2.A La serie converge semplicmente in $]0, +\infty[$

2.B La serie non converge in alcun punto $x_0 \in \mathbf{R}$

2.C La serie converge semplicemente, ma non assolutamente, in $x_0 = 0$

2.D Esiste $a > 0$ tale che la serie converge uniformemente in $]-a, a[$

3. *Sia* $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da* $u(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \in [0, \pi[\\ 4(x+\pi)^3 & x \in]-\pi, 0[\end{cases}$ *e prolungata per periodicità al di fuori di* $]-\pi, \pi]$. *Sia* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$ *la serie di Fourier di* u. *È necessariamente vero che:*

3.A La serie di Fourier di u converge ad u, puntualmente in $\mathbf{R}$

3.B La serie di Fourier di u non è uniformemente convergente in $]0, +\infty[$

3.C $a_n = 0$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$

3.D La serie di Fourier di u converge a 0 in $x_0 = 0$

4. *Sia* $x'''(t) + a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 = 0$ *l'equazione differenziale lineare omogenea del terzo ordine, la cui equazione caratteristica ha radici reali* $0, 2, 3$. *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

4.A Il Teorema di Cauchy assicura l'esistenza di un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = 2$

4.B La funzione $t \mapsto 1 + e^{2t} + e^{3t}$ è soluzione dell'equazione differenziale

4.C L'equazione differenziale non ammette alcuna soluzione soddisfacente le condizioni $x(0) = x'(0) = 0$

4.D La funzione $t \mapsto te^{2t}$ è soluzione dell'equazione differenziale

5. *Sia* $D = A \cup B$, *dove* A *è la metà del cerchio di centro l'origine e raggio* 2 *contenuta nel semipiano* $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$ *e* B *è il triangolo di vertici* $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (2, -1)$. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *una funzione integrabile* *in* $E := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x,y) \in D, |z| \leq 3\}$ *e poniamo* $I = \int\int\int_E f(x,y,z)dxdydz$. *Allora è necessariamente vero che:*

5.A $I = \displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{-2-4y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

5.B $I = \displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-3}^{3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx + \int_{0}^{2}\int_{-2-4y}^{2}\int_{-3}^{3} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

5.C $I = \displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz + \int_{-3}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$

5.D $I = \displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-3}^{3} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

6. *Siano* $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *due campi vettoriali di classe* C^1 *e* (x_0, y_0, z_0) *un punto assegnato nel quale* $\mathrm{div}(f - g)(x_0, y_0, z_0) = 0$. *Allora è necessariamente vero che:*

6.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta

6.B $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0)$

6.C esiste $\lambda_0 \neq 0$, tale che $g(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 f(x_0, y_0, z_0)$

6.D $f - g$ ha un punto critico in (x_0, y_0, z_0)

7. *Sia* $\varphi(x) = 2 - x^2$ *e, per ogni* $n = 1, 2, \ldots$, *sia* $f_n(x) = \begin{cases} \varphi(nx) & x \in [-\frac{\sqrt{2}}{n}, +\frac{\sqrt{2}}{n}], \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$ *Allora è necessariamente vero che*

7.A La successione di funzioni f_n converge puntualmente in $\mathbf{R}$

7.B La successione di funzioni f_n non converge puntualmente in $[0, +\infty[$

7.C esiste $M > 0$ tale che la successione di funzioni f_n converge uniformemente in $[-M, M]$

7.D Nessuna delle altre affermazioni è esatta

8. *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *una successione di numeri reali non nulli tale che per ogni* $n = 1, 2, \ldots$ *valga la condizione* $|a_{n+1}/a_n| \leq 6$. *Allora è necessariamente vero che:*

8.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta

8.B La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente

8.C La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ tende a $+\infty$

8.D La successione $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ non è di Cauchy

9. *Sia* $x : I \to \mathbf{R}$ *(*$I \subset \mathbf{R}$ *intervallo aperto contenente* 0*) soluzione del problema di Cauchy* $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$ *dove* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *è una funzione continua, tale che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, *e* $x_0 \neq 0$ *è un numero reale assegnato. Allora è necessariamente vero che:*

9.A x è l'unica soluzione locale del problema di Cauchy considerato

9.B Il problema di Cauchy considerato ammette infinite soluzioni locali

9.C La funzione x è strettamente crescente in un intorno di 0

9.D La funzione x è convessa in un intorno di 0

10. *Sia* $\varphi : [-1, \pi] \to \mathbf{R}^3$ *la curva parametrizzata definita da* $\varphi(t) = (\cos t, 3, (\operatorname{sen} t)^2)$. *Quale delle seguenti affermazioni è vera ?*

10.A φ è semplice e chiusa

10.B Il sostegno della curva φ è contenuto in un piano parallelo al piano coordinato $y = 0$

10.C φ è regolare

10.D Il sostegno di φ è incluso in un'ellisse

Risposte esatte:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Compito A:	A	C	B	B	D	A	A	A	C	B