Analisi Funzionale
Note Integrative

Rinaldo M. Colombo

Anno Accademico 2003 – 2004

26 maggio 2004

Queste dispense, nate per gli studenti del corso di Analisi Funzionale presso l'Università Cattolica (sede di Brescia), sono disponibili liberamente in rete. Ringrazio tutti coloro che mi faranno avere osservazioni, suggerimenti, critiche, correzioni . . .

Indice

1 Spazi Vettoriali Topologici

Nel seguito, $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Per *"topologia"* si intende la famiglia degli aperti.

Definizione 1.1. X si dice spazio vettoriale topologico se

(i) X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$;

(ii) X è uno spazio topologico di Hausdorff;

(iii) la somma di vettori ed il prodotto di uno scalare per un vettore sono funzioni continue.

Esempio 1.2. Esempi di spazi vettoriali topologici.

La Proposizione 3.2 mostra che ogni spazio vettoriale normato è anche uno spazio vettoriale topologico. In particolare, con le usuali strutture lineare e topologica, i seguenti sono spazi vettoriali topologici: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. $\mathbf{C^0}\big([a,b]\big)$ (con la norma del sup). $\mathbf{L^p}(\Omega, \mathcal{S}, \mu, \mathbb{K})$, con $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ spazio di misura, è l'insieme delle funzioni $\Omega \mapsto \mathbb{K}$ misurabili e tali che $|f|^p$ è assolutamente integrabile su Ω rispetto alla misura μ. c_c è l'insieme delle successioni reali definitivamente nulle (con la norma del sup). c_o è l'insieme delle successioni reali convergenti a 0 (con la norma del sup). ℓ^p (con $p \in [1, +\infty[$) è l'insieme delle successioni $x \colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ con norma $\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p}$ finita. ℓ^∞ è l'insieme delle successioni limitate dotato della norma del sup. Questi ultimi spazi coincidono con $\mathbf{L^p}(\mathbb{N}, \sharp)$ dove $\sharp$ è la misura del conteggio.

Esercizio 1.3. Formalizzare e dimostrare: in uno spazio vettoriale topologico la topologia è invariante per traslazione.

Proposizione 1.4. X spazio vettoriale topologico.

(i) V sottospazio vettoriale di $X \Rightarrow \bar{V}$ sottospazio vettoriale di X.

(ii) V sottospazio vettoriale di $X \Rightarrow V$ spazio vettoriale topologico (con la topologia indotta da X).

(iii) V sottospazio vettoriale chiuso di $X \Rightarrow X/V$ spazio vettoriale topologico con la topologia del quoziente.

Dimostrazione. Omessa, cfr. [13]. □

Uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita può avere sottospazi vettoriali non chiusi. Ad esempio c_c è denso in ℓ^∞, $\mathbf{C^0}$ è denso in $\mathbf{L^1}$.

Proposizione 1.5. X spazio vettoriale topologico. V sottospazio proprio di X. Allora V ha parte interna $\mathring{V}$ vuota.

Dimostrazione. Sia $x \in X$, $x \notin V$. Per assurdo, sia $\mathring{V} \neq \emptyset$, si può quindi assumere che $0 \in \mathring{V}$. Allora esiste un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\lambda x \in \mathring{V}$, da cui segue l'assurdo. □

La Proposizione 1.5 può essere riassunta dicendo che *un aperto deve contenere un vettore "per ogni direzione"*.

Proposizione 1.6. X spazio vettoriale topologico. V sottospazio di X.

$$\dim V < +\infty \Longrightarrow V \text{ è chiuso.}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [13]. □

Definizione 1.7. X SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO. $A \subseteq X$ SI DICE

$$\begin{array}{lll} \text{CONVESSO} & \rightleftharpoons & \forall\, x, y \in A,\ \forall\, t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A \\ \text{SIMMETRICO} & \rightleftharpoons & \forall\, x \in A,\ -x \in A \\ \text{BILANCIATO} & \rightleftharpoons & \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq 1,\ \forall\, x \in A,\ \lambda x \in A \\ \text{ASSORBENTE} & \rightleftharpoons & \forall\, x \in X\ \exists\, \lambda \in \left]0, +\infty\right[: \lambda x \in A \end{array}$$

Esercizio 1.8. X spazio vettoriale topologico. Sia $A \subseteq X$.

$$\begin{array}{lll} A \text{ è convesso} & \Leftrightarrow & \forall\, t \in [0,1], \quad tA + (1-t)A \subseteq A \\ A \text{ è simmetrico} & \Leftrightarrow & -A \subseteq A \\ A \text{ è bilanciato} & \Leftrightarrow & \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad |\lambda| \leq 1, \quad \lambda A \subseteq A \\ & \Leftrightarrow & \forall\, a, b \in \mathbb{K} \text{ con } |a| \leq |b| \text{ vale } aA \subseteq bA \\ A \text{ è assorbente} & \Leftrightarrow & \forall\, x \in X \quad \exists\, \lambda \in \left]0, +\infty\right[: x \in \lambda A\,. \end{array}$$

Esercizio 1.9. Come si comportano le proprietà precedenti rispetto alle operazioni di insieme (unione, intersezione, ...) e rispetto all'inclusione?

Proposizione 1.10. X spazio vettoriale topologico. $A \subseteq X$.

$$A \text{ bilanciato} \Longrightarrow A \text{ simmetrico.}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 1.11. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con l'usuale struttura euclidea e $A \subseteq X$. Mostrare con degli esempi che se A gode di una delle proprietà introdotte dalla Definizione 1.7, può non averne nessun'altra (con l'eccezione di quanto affermato dalla Proposizione 1.10).

Proposizione 1.12. X spazio vettoriale topologico.

$$\mathcal{U} \text{ intorno dell'origine} \Longrightarrow \mathcal{U} \text{ assorbente.}$$

Dimostrazione. Immediata. □

I due lemmi seguenti danno un ruolo particolare all'origine. In virtù dell'Esercizio 1.3, entrambi i lemmi posso essere formulati sostituendo all'origine un generico $x \in X$.

Lemma 1.13. X spazio vettoriale topologico. $\mathcal{U}$ intorno aperto di 0. Allora esiste un intorno aperto $\mathcal{V}$ di 0 tale che $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \leq 1$, vale $\alpha\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Per la continuità del prodotto per scalare, fissato $\mathcal{U}$ esiste un $\delta > 0$ ed esiste un $\mathcal{U}'$ intorno dell'origine tale che per ogni $\alpha \in \left]-\delta, \delta\right[$ e per ogni $x \in \mathcal{U}'$ vale $\alpha x \in \mathcal{U}$. Sia $\mathcal{V} = \delta\,\mathcal{U}'$. □

Lemma 1.14. X spazio vettoriale topologico. $\mathcal{U}$ intorno aperto di 0. Allora esiste un intorno aperto bilanciato $\mathcal{B}$ di 0 tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Dato $\mathcal{U}$, sia $\mathcal{V}$ l'intorno costruito nel Lemma 1.13. Sia $\mathcal{B} = \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha\mathcal{V}$. $\mathcal{B}$ contiene l'origine. $\mathcal{B}$ è aperto perché è unione di aperti. $\mathcal{B}$ è bilanciato poiché se $a \in \left]-1, 1\right[$, allora $a\mathcal{B} = a \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha\mathcal{V} = \bigcup_{|\alpha| \leq 1} a\alpha\mathcal{V} = \bigcup_{|b| \leq |a|} b\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$. Infine, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ per il Lemma 1.13. □

Esercizio 1.15. Mostrare che nel Lemma 1.14, l'insieme $\mathcal{B}$ può essere scelto soddisfacente anche a: $\mathcal{B} + \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.

Esercizio 1.16. Dimostrare che l'involucro convesso di un insieme bilanciato è bilanciato.

1.1 Limitatezza

Definizione 1.17. X SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO, $A \subseteq X$. A SI DICE LIMITATO SE $\forall \mathcal{U}$ INTORNO DI 0, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A \subseteq \lambda \mathcal{U}$.

Esercizio 1.18. Verificare che in uno spazio vettoriale normato la definizione precedente coincide con l'usuale definizione di limitatezza.

Proposizione 1.19. X spazio vettoriale topologico. $A \subseteq X$. Allora

$$A \text{ finito } \implies A \text{ limitato.}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 1.20. X spazio vettoriale topologico. Allora, l'unione di 2 insiemi limitati è un insieme limitato. Il traslato di un insieme limitato è un insieme limitato.

Proposizione 1.21. X spazio vettoriale topologico. V sottospazio di X. Allora

$$V \text{ limitato} \implies V = \{0\}.$$

Dimostrazione. Sia $x \in V$ e sia $\mathcal{U}$ un intorno dell'origine. Per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$, $V \subseteq \lambda\mathcal{U}$. Quindi $\lambda x \in \lambda\mathcal{U}$ e $x \in \mathcal{U}$. X è di Hausdorff, quindi $x = 0$, da cui la tesi. □

Proposizione 1.22. X spazio vettoriale topologico con topologia indotta da una metrica invariante per traslazione (cfr. Definizione 10.6). Allora la limitatezza introdotta dalla Definizione 1.17 può non coincidere con la limitatezza nel senso della distanza.

Dimostrazione. La distanza $d(x_1, x_2) = \frac{|x_2 - x_1|}{1 - |x_2 - x_1|}$ è invariante per traslazione e rende $\mathbb{R}$ uno spazio vettoriale topologico limitato. □

Proposizione 1.23. X spazio vettoriale topologico con topologia indotta da una metrica invariante per traslazione ed omogenea (cfr. Definizione 10.6). Allora la limitatezza introdotta dalla Definizione 1.17 coincide con la limitatezza nel senso della distanza.

Dimostrazione. Immediata. □

1.2 Compattezza

Definizione 1.24. X spazio topologico, $A \subseteq X$. A è compatto se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoricoprimento finito. A è relativamente compatto se $\bar{A}$ è compatto. A è compatto per successioni se ogni successione di elementi di A ammette una sottosuccessione convergente ad un elemento di A.

Proposizione 1.25. X spazio topologico. $K \subseteq X$.

$$K \text{ compatto} \Longrightarrow K \text{ compatto per successioni.}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [2]. □

Proposizione 1.26. X spazio vettoriale topologico, $K \subseteq X$.

$$K \text{ compatto} \Longrightarrow \begin{cases} K \text{ chiuso} \\ K \text{ limitato} \end{cases}$$

Dimostrazione. K compatto $\Rightarrow$ K chiuso vale in ogni spazio topologico. Sia $\mathcal{U}$ un intorno aperto e bilanciato dell'origine. Allora $\{n\mathcal{U} \colon n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di K. Quindi $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} n_i \mathcal{U} = (\max_i n_i)\, \mathcal{U}$, da cui la tesi. □

Proposizione 1.27. Sia $X = \mathbb{K}^n$ con l'usuale struttura, $K \subseteq \mathbb{K}^n$

$$K \text{ compatto} \Longleftrightarrow \begin{cases} K \text{ chiuso} \\ K \text{ limitato} \end{cases}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [2]. □

La proprietà precedente viene a volte indicata come *"proprietà di Heine–Borel"*, cfr. Corollario 9.13.

Esempio 1.28. Sia $X = \mathbf{C^0}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{[0,1]} \big|x(t)\big|$. La sfera unitaria chiusa $B = \big\{x \in X \colon \|x\|_\infty \leq 1\big\}$ è chiusa e limitata ma non é compatta. Dalla successione $x_n(t) = t^n$, infatti, non è possibile estrarre una sottosuccessione (uniformemente) convergente.

Corollario 1.29. X spazio vettoriale topologico. V sottospazio di X.

$$V \text{ compatto } \Longrightarrow V = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. Segue dalle proposizioni 1.20 e 1.26. □

Definizione 1.30. Uno spazio topologico in cui ogni punto abbia un intorno relativamente compatto si dice localmente compatto.

Proposizione 1.31. X spazio vettoriale topologico. Sono equivalenti:

(1) X è localmente compatto.

(2) $\exists\, K \subseteq X$, K compatto, $\mathring{K} \neq \emptyset$.

(3) $\exists\, K \subseteq X$, K compatto, $\{0\} \subseteq \mathring{K}$.

(4) $\dim X$ finita.

Dimostrazione.
(1) $\Rightarrow$ (2): ovvio.
(2) $\Rightarrow$ (3): ovvio.
(3) $\Rightarrow$ (4): $\left\{x + \frac{1}{2}\mathring{K} \colon x \in K\right\}$ è un ricoprimento aperto di K. Sia quindi $\left\{x_1 + \frac{1}{2}\mathring{K}, \ldots, x_n + \frac{1}{2}\mathring{K}\right\}$ un sottoricoprimento finito. Sia V lo spazio generato da $x_1, \ldots, x_n$. Poiché $\dim V \leq n$, V è un sottospazio chiuso, quindi X/V è uno spazio vettoriale topologico con la topologia del quoziente (cfr. Proposizione 1.4). Quindi, detta $\pi \colon X \mapsto X/V$ la proiezione canonica sul quoziente, $\pi(K)$ è un compatto in X/V contenente l'origine V e con parte interna non vuota. Da

$$K \subseteq \bigcup_{h=1}^{n} \left(x_h + \frac{1}{2}\mathring{K}\right) \subseteq V + \frac{1}{2}\mathring{K} \subseteq V + \frac{1}{2}K$$

segue

$$\pi(K) \subseteq \pi(V) + \frac{1}{2}\pi(K)$$

e quindi

$$\pi(K) \subseteq \frac{1}{2}\pi(K)\,.$$

Iterando, $\pi(K) \subseteq \frac{1}{2}\pi(K) \subseteq \ldots \subseteq \frac{1}{2^k}\pi(K)$. Ne segue che

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad 2^k\pi(K) \subseteq \pi(K)\,. \tag{1.1}$$

D'altra parte, per ogni $x \in X$ esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-k}x \in K$ o, equivalentemente, $x \in 2^k K$. Questo, assieme a (1.1), mostra che $X/V \subseteq \pi(K)$. Quindi X/V è compatto e, per la Proposizione 1.29, X/V è banale. Ne segue che $X = V$, quindi X ha dimensione finita.
(4) $\Rightarrow$ (1) noto. □

Il seguente criterio di compattezza in $\mathbf{C^0}$ è spesso indicato come *"Teorema di Ascoli – Arzelà"*.

Proposizione 1.32. K spazio metrico compatto, Y spazio di Banach, $E \subseteq \mathbf{C^0}(K, Y)$.

$$\begin{gathered} E \text{ è relativamente compatto} \\ \Longleftrightarrow \\ \bigcup_{x \in E} x(K) \text{ è relativamente compatto, e} \\ \text{le funzioni di } E \text{ sono equicontinue.} \end{gathered}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [6, 7, 10]. □

Nella proposizione seguente, un criterio di compattezza in $\mathbf{L^p}$, viene utilizzato l'operatore di traslazione τ_h così definito. Fissato $h \in \mathbb{K}^n$ e data $f\colon \Omega \mapsto \mathbb{K}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$, sia $\tau_h f$ la funzione definita da

$$(\tau_h f)(x) = \begin{cases} f(x+h) & \text{se } x+h \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x+h \notin \Omega\,. \end{cases}$$

Proposizione 1.33. Siano $p \in [1, +\infty[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita ed $E \subseteq \mathbf{L^p}(\Omega)$.

$$\begin{gathered} E \text{ è relativamente compatto in } \mathbf{L^p}(\Omega) \\ \Longleftrightarrow \\ E \text{ limitato, e} \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \colon \forall\, h \in \left]\delta, \delta\right[\ \ \forall\, f \in E\ \ \left\| \tau_h f - f \right\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)} < \varepsilon\,. \end{gathered}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1, 5]. □

Proposizione 1.34. Siano $p \in [1, +\infty[$ ed $E \subseteq \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{gathered} E \text{ è relativamente compatto in } \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^n) \\ \Longleftrightarrow \\ E \text{ limitato,} \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \colon \forall\, h \in \left]\delta, \delta\right[\ \ \forall\, f \in E\ \left\| \tau_h f - f \right\|_p < \varepsilon\,, \text{ e} \\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ di misura finita:} \forall\, f \in E\ \left\| f \right\|_{\mathbf{L^p}/\mathbb{R}^n \setminus \Omega} < \varepsilon\,. \end{gathered}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1, 5]. □

1.3 Completezza

La definizione di limite di una successione in uno spazio vettoriale topologico è l'usuale definizione data nell'ambito di spazi topologici.

Definizione 1.35. X SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ SUCCESSIONE.

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ È DI CAUCHY} \rightleftharpoons \begin{cases} \forall\, \mathcal{U} \text{ INTORNO DELL'ORIGINE} \\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE} \\ \forall\, n, m > \nu \quad x_n - x_m \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Proposizione 1.36. X spazio vettoriale topologico. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione.

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ convergente} \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ di Cauchy.}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un intorno dell'origine. Sia $\mathcal{V}$ un intorno dell'origine bilanciato tale che $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ (cfr. Esercizio 1.15). Esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ vale $x_n \in \mathcal{V}$. Quindi, se $n, m > \nu$, si ha $(x_n - x_m) \in \mathcal{V} - \mathcal{V} = \mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. □

Definizione 1.37. X SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO. X È COMPLETO SE OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY AMMETTE LIMITE IN X.

Proposizione 1.38. X spazio vettoriale topologico. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione.

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ di Cauchy} \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ limitata.}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un intorno bilanciato dell'origine. Sia $\mathcal{V}$ un intorno bilanciato dell'origine tale che $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ (Esercizio 1.15). L'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}\}$ è limitato (Proposizione 1.19) quindi $\{x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}\} \subseteq \lambda'\mathcal{V}$ per un opportuno $\lambda' > 0$. Inoltre, esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ vale $x_n \in x_\nu + \mathcal{V}$. Per un opportuno $\lambda'' \in \mathbb{R}$, $\lambda'' > 1$, vale $x_\nu \in \lambda''\mathcal{V}$. Sia $\Lambda = \max\left\{\lambda', \lambda''\right\}$. Ne segue che

$$\begin{aligned}
\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} &\subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}\} \cup \{x_n \colon n \in \mathbb{N}, n \geq \nu\} \\
&\subseteq \lambda'\mathcal{V} \cup (x_\nu + \mathcal{V}) \\
&\subseteq \lambda'\mathcal{V} \cup \left(\lambda''\mathcal{V} + \mathcal{V}\right) \\
&\subseteq \Lambda\mathcal{V} \cup \left(\Lambda\left(\mathcal{V} + \mathcal{V}\right)\right) \\
&\subseteq \Lambda\mathcal{U}
\end{aligned}$$

□

Corollario 1.39. X spazio vettoriale topologico. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione.

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ convergente} \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ limitata.}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Proposizione 1.40. X spazio vettoriale topologico, $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione di Cauchy in X. $y\colon \mathbb{N} \mapsto X$ sottosuccessione convergente a y_∞. Allora, l'intera successione $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ converge a y_∞.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un intorno dell'origine e sia $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ un intorno bilanciato di 0 costruito come nell'Esercizio 1.15. Definitivamente, si ha

$$\left.\begin{array}{l} (x_n - y_n) \in \mathcal{V} \\ y_n \in y_\infty + \mathcal{V} \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n \in y_\infty + \mathcal{U}\,.$$

da cui la tesi. □

Corollario 1.41. X spazio vettoriale topologico, $K \subseteq X$.

$$K \text{ compatto per successioni} \Longrightarrow K \text{ completo.}$$

Dimostrazione. Sia $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ una successione di Cauchy in K. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ ammette una sottosuccessione $y\colon \mathbb{N} \mapsto X$ convergente ad un limite $y_\infty \in K$. Per la Proposizione 1.40, l'intera successione $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ converge a y_∞. □

Esercizio 1.42. Dimostrare che il viceversa del Corollario 1.41 è falso.

Esercizio 1.43. Dimostrare che c_c con la norma del sup non è completo.

Esercizio 1.44. Dimostrare che $\mathbf{C^0_c}(\mathbb{R})$ con la norma del sup non è completo.

1.4 Continuità

Definizione 1.45. X, Y SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI. SIANO $A \subseteq X$, $x_* \in A$ E $f\colon A \mapsto Y$

$$f \text{ CONTINUA IN } x_* \;\rightleftharpoons\; \begin{cases} \forall\, \mathcal{V} \subseteq Y \text{ INTORNO DI } 0 \\ \exists\, \mathcal{U} \subseteq X \text{ INTORNO DI } 0\text{:} \\ \forall\, x \in A\colon x - x_* \in \mathcal{U},\;\; f(x) - f(x_*) \in \mathcal{V}\,. \end{cases}$$

$$f \text{ CONTINUA IN } A \;\rightleftharpoons\; \begin{cases} \forall\, x \in A\,,\; \forall\, \mathcal{V} \subseteq Y \text{ INTORNO DI } 0 \\ \exists\, \mathcal{U} \subseteq X \text{ INTORNO DI } 0\text{:} \\ \forall\, x' \in A\colon x - x' \in \mathcal{U},\;\; f(x) - f(x') \in \mathcal{V}\,. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} f \text{ UNIFORMEMENTE} \\ \text{CONTINUA IN } A \end{array} \;\rightleftharpoons\; \begin{cases} \forall\, \mathcal{V} \subseteq Y \text{ INTORNO DI } 0 \\ \exists\, \mathcal{U} \subseteq X \text{ INTORNO DI } 0\text{:} \\ \forall\, x, x' \in A\colon x - x' \in \mathcal{U},\;\; f(x) - f(x') \in \mathcal{V}\,. \end{cases}$$

Proposizione 1.46. X, Y spazi vettoriali topologici. Siano $A \subseteq X$ e $f\colon A \mapsto Y$.

$$f \text{ uniformemente continua in } A \Longrightarrow f \text{ continua in } A\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

1.5 Separabilità

Definizione 1.47. X SPAZIO TOPOLOGICO.

$$X \text{ È SEPARABILE } \;\rightleftharpoons\; \exists\, S \subseteq X\colon \begin{cases} S \text{ È NUMERABILE} \\ S \text{ È DENSO IN } X\,. \end{cases}$$

Esempio 1.48. $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono separabili.

Proposizione 1.49. Se $p \in [1, +\infty[$, $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{S}$ σ–algebra dei borelliani, allora $\mathbf{L^p}(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ con $\|\cdot\|_{\mathbf{L^p}}$ è separabile.

Dimostrazione. Scegliere come S l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$ di funzioni caratteristiche di prodotti cartesiani di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$. □

Proposizione 1.50. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con la norma del sup non è separabile.

Dimostrazione. Sia S l'insieme delle funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. S ha la cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, quindi non è numerabile. Sia D un sottoinsieme denso di ℓ^∞. Allora, per ogni $s \in S$, esiste un $d_s \in D$ tale che $\|d - s\|_\infty < 1/2$. La corrispondenza $s \mapsto d_s$ è iniettiva: se d approssima sia s' e s'', i.e. $d = d_{s'} = d_{s''}$, allora

$$\left\|s'' - s'\right\|_\infty \le \left\|s'' - d\right\|_\infty + \left\|d - s'\right\|_\infty < 1$$

e quindi $s' = s''$ perchè elementi distinti di S hanno distanza 1. Quindi D ha cardinalità non inferiore a quella di S, da cui la tesi. □

Proposizione 1.51. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a parte interna non vuota, $\mathcal{S}$ la σ–algebra dei borelliani e μ la misura di Lebesgue. Lo spazio $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ con $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^\infty}$ non è separabile.

Dimostrazione. Siano $x_o \in \mathring{\Omega}$ e r_o tale che $B(x_o, r_o) \subseteq \Omega$. Sia S l'insieme delle funzioni caratteristiche di sfere $B(x_o, r)$ con $r \in]0, r_o]$. Proseguire come nella dimostrazione della Proposizione 1.51. □

Proposizione 1.52. Siano a, b in $\mathbb{R}$, $a < b$. Lo spazio $\mathbf{C^0}\big([a,b]\big)$ con la norma del sup è separabile.

Dimostrazione. Scegliere come S l'insieme delle funzioni continue e lineari a tratti il cui grafico è una spezzata con vertici in $\mathbb{Q}$. □

2 Spazi Seminormati e Localmente Convessi

2.1 Spazi Seminormati

Definizione 2.1. X SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$. SI DICE SEMINORMA SU X UNA FUNZIONE $p \colon X \mapsto \mathbb{R}$ TALE CHE

(I) p È SUBADDITIVA: $\forall\, x, y \in X,\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

(II) p È OMOGENEA: $\forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$.

Proposizione 2.2. p seminorma su X. Allora

(i) $p(0) = 0$;

(ii) $\forall\, x \in X$, vale $p(x) \geq 0$;

(iii) $\forall\, x, y \in X$, vale $\big|p(x) - p(y)\big| \leq p(x-y)$.

Dimostrazione. Immediata. □

Proposizione 2.3. X spazio vettoriale normato. p seminorma su X che si annulli solo in 0. Allora p è una norma.

Dimostrazione. Immediata. □

Definizione 2.4. UNO SPAZIO VETTORIALE SEMINORMATO È UNO SPAZIO VETTORIALE MUNITO DI UNA FAMIGLIA SEPARANTE DI SEMINORME. UNA FAMIGLIA DI SEMINORME $\{p_\alpha \colon \alpha \in I\}$ SI DICE SEPARANTE SE VALE

$$p_\alpha(x) = 0 \quad \forall\, \alpha \in I \Rightarrow x = 0\,.$$

Proposizione 2.5. X spazio vettoriale seminormato con la famiglia di seminorme $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$. Siano

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ \mathcal{U}(n,\alpha,r) \in \mathcal{P}(X) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\, \alpha \in I^n,\, r \in \left]0,+\infty\right[^n \right\} \\ \mathcal{U}(n,\alpha,r) &= \left\{ \xi \in X : p_{\alpha_i}(\xi - x) < r_i,\ i = 1,\ldots,n \right\} \\ \mathcal{S}_x &= \{x + \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{S}\} \qquad \forall\, x \in X\,. \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_x$ costituisce un sistema fondamentale di intorni di x (cfr. Definizione 10.1). Questi intorni sono convessi, bilanciati (quindi simmetrici) ed a parte interna non vuota, (quindi assorbenti per $x = 0$). X è uno spazio vettoriale topologico con la topologia così introdotta.

Dimostrazione. Immediata. □

Esempio 2.6. Esempi di spazi seminormati:

(1) $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale seminormato con $p_x(x,y) = |x|$, $p_y(x,y) = |y|$. La topologia così introdotta è quella della convergenza puntuale.

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora $\mathbf{C^0}(A)$ è seminormato con $p_K(x) = \sup_K \|x\|$, K compatto, K contenuto in A.

(3) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora $\mathbf{C}^\infty_c(A)$ è seminormato con la famiglia di seminorme $p_{K,n}(x) = \sup_K \|D^n x\|$, K compatto, K contenuto in A, n multiindice. Il duale, cfr. Definizione 5.15, di questo spazio è lo spazio delle distribuzioni.

(4) $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^A$ è seminormato con $p_t(x) = \big|x(t)\big|$, $t \in A$. La convergenza nella topologia così introdotta coincide con la convergenza puntuale.

(5) X spazio vettoriale normato. È seminormato con una famiglia separante di seminorme composta unicamente dalla norma.

Proposizione 2.7. X spazio vettoriale seminormato con la famiglia di seminorme $\{p_\alpha : \alpha \in I\}$, $x : \mathbb{N} \mapsto X$ successione, $x_\infty \in X$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \iff \forall\, \alpha \in I \ \lim_{n\to+\infty} p_\alpha(x_n - x_\infty) = 0\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 2.8. Dimostrare che in uno spazio vettoriale seminormato, le seminorme che definiscono la topologia sono funzioni continue.

Proposizione 2.9. X spazio vettoriale seminormato da una famiglia numerabile di seminorme. Allora X è metrizzabile con una distanza invariante per traslazioni (cfr. Definizione 10.6).

Dimostrazione. Per $x_1, x_2 \in X$, sia $d(x_1,x_2) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x_2 - x_1)}{1 + p_n(x_2 - x_1)}$. □

Esercizio 2.10. La distanza introdotta nella Proposizione 2.9, in generale, non è omogenea (cfr. Definizione 10.6).

Esercizio 2.11. Completare la dimostrazione della Proposizione 2.9.

2.2 Spazi Localmente Convessi

Definizione 2.12. Uno spazio vettoriale topologico X si dice localmente convesso se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni convessi.

Esercizio 2.13. Ogni spazio vettoriale normato è localmente convesso. Le sfere (aperte) centrate in x costituiscono un sistema fondamentale di intorni convessi di x (cfr. Proposizione 3.2).

Esercizio 2.14. X spazio vettoriale localmente convesso. p seminorma su X. Allora p può non essere continua.

Proposizione 2.15. X spazio vettoriale localmente convesso. Allora ogni punto di X ammette un sistema fondamentale di intorni convessi e bilanciati.

Dimostrazione. In base all'Esercizio 1.3, non è restrittivo considerare solo l'origine. Sia $\mathcal{U} \in \mathcal{S}_0$ un intorno fondamentale convesso dell'origine. Per il Lemma 1.14, esiste un intorno di 0 bilanciato $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$. Sia $\mathcal{V}$ l'involucro convesso di $\mathcal{B}$. $\mathcal{V}$ è un intorno dell'origine (poiché $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{B}$). $\mathcal{V}$ è bilanciato perché è l'involucro convesso di un insieme bilanciato. cfr. Esercizio 1.16. Ovviamente, $\mathcal{V}$ è convesso e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. □

Il seguito di questo paragrafo mostra che le definizioni 2.4 e 2.12 sono equivalenti.

Definizione 2.16. X spazio vettoriale. $\mathcal{B} \subseteq X$. Si dice funzionale di Minkowski di $\mathcal{B}$ la funzione

$$\begin{array}{rccl} \mu_{\mathcal{B}} & : & X & \mapsto & [0, +\infty[\\ & & x & \mapsto & \inf\left\{\alpha \in [0, +\infty[: x \in \alpha\mathcal{B}\right\} \end{array}$$

In alcuni testi, il funzionale di Minkowski di $\mathcal{B}$ viene chiamato *gauge di $\mathcal{B}$*.

Proposizione 2.17. X spazio vettoriale. $\mathcal{B} \subseteq X$.

$$\begin{array}{rcccl} \text{(i)} & \mathcal{B} & \text{assorbente} & \Rightarrow & \mu_{\mathcal{B}} \text{ ha senso} \\ \text{(ii)} & \mathcal{B} & \text{bilanciato} & \Rightarrow & \mu_{\mathcal{B}} \text{ omogeneo} \\ \text{(iii)} & \mathcal{B} & \text{convesso} & \Rightarrow & \mu_{\mathcal{B}} \text{ subadditivo} \\ \text{(iv)} & \mathcal{B} & \left\{\begin{array}{c}\text{assorbente}\\ \text{bilanciato}\\ \text{convesso}\end{array}\right\} & \Rightarrow & \mu_{\mathcal{B}} \text{ seminorma} \\ \text{(v)} & \mathcal{B} & \left\{\begin{array}{c}\text{assorbente}\\ \text{bilanciato}\\ \text{convesso}\\ \text{limitato}\end{array}\right\} & \Rightarrow & \mu_{\mathcal{B}} \text{ norma.} \end{array}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (i), ..., (iv) sono immediate. Per (v), sia $x \in X$ con $\mu_{\mathcal{B}}(x) = 0$. Allora per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu_{\mathcal{B}}(\lambda x) = 0$. Allora $\mathbb{K}x \subseteq \mathcal{B}$, per la Proposizione 1.21, $\mathbb{K}x = \{0\}$, quindi $x = 0$. □

Proposizione 2.18. X spazio vettoriale. Allora

$$X \text{ seminormato} \iff X \text{ localmente convesso.}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è il contenuto della Proposizione 2.5.

Implicazione $\Leftarrow$. Per la Proposizione 2.15, ogni punto x di X ammette un sistema fondamentale di intorni convessi e bilanciati $\mathcal{S}_x$. Sia $\{p_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \in \mathcal{S}_0\}$ la famiglia dei funzionali di Minkowski degli intorni fondamentali (bilanciati e convessi) dell'origine. Ogni intorno dell'origine è assorbente (cfr. Esercizio 1.12). Quindi, per la Proposizione 2.17, $\{p_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \in \mathcal{S}_0\}$ è una famiglia di seminorme. Sono separanti poiché se $p_{\mathcal{U}}(x) = 0$ per ogni $\mathcal{U}$, allora $x \in \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U}$ e quindi $x = 0$. Le $\{p_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \in \mathcal{S}_0\}$ inducono la stessa topologia poiché, per ogni $\mathcal{U}$, vale $\big\{x \in X: p_{\mathcal{U}}(x) < 1/2\big\} \subset \mathcal{U} \subset \big\{x \in X: p_{\mathcal{U}}(x) < 2\big\}$. □

Esercizio 2.19. Esibire un esempio di insieme il cui funzionale di Minkowski non sia continuo.

3 Spazi di Banach

Definizione 3.1. X SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{K}$. X È UN SPAZIO VETTORIALE NORMATO SE ESISTE UNA FUNZIONE $\|\ \|: X \mapsto \mathbb{R}$ TALE CHE:

(I) $\forall\, x \in X,\ \|x\| \geq 0$;

(II) $\forall\, x \in X,\ \|x\| = 0 \iff x = 0$;

(III) $\forall\, x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(IV) $\forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Proposizione 3.2. X spazio vettoriale normato. Allora X è uno spazio metrico con la distanza

$$d(x, y) = \|y - x\| \tag{3.2}$$

e la topologia indotta da d rende X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Inoltre, la distanza (3.2) è invariante per traslazione ed omogenea.

Dimostrazione. Immediata, cfr. Esercizio 2.13 e Definizione 10.5. □

Nel seguito, in uno spazio vettoriale normato X, la sfera aperta di centro $x_o \in X$ e raggio $r > 0$ verrà indicata con $B(x_o, r)$:

$$B(x_o, r) = \big\{x \in X: \|x - x_o\| < r\big\}\ .$$

Esempio 3.3. Sia X uno spazio in cui sia definito un prodotto scalare (i.e. una forma bilineare simmetrica definita positiva). Allora X è uno spazio vettoriale normato con $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.

Definizione 3.4. UNO SPAZIO VETTORIALE NORMATO COMPLETO SI DICE SPAZIO DI BANACH.

Esercizio 3.5. Quali degli insiemi definiti negli esempio 1.2 e 2.6 sono spazi di Banach?

Esercizio 3.6. Dimostrare che in uno spazio vettoriale normato, la norma che definisce la topologia è una funzione continua, mentre altre norme possono non essere continue.

Proposizione 3.7. X spazio vettoriale normato. Allora esiste uno spazio $\hat{X}$ tale che:

(i) $\hat{X}$ è uno spazio di Banach;

(ii) X si identifica in modo naturale con un sottospazio denso di $\hat{X}$.

Dimostrazione. Cfr. Esercizio 3.9. □

Definizione 3.8. Lo spazio $\hat{X}$ costruito nella Proposizione 3.7 è il completamento di X.

Esercizio 3.9. Dimostrare la Proposizione 3.7 seguendo, ad esempio, questo procedimento:

(1) Lo spazio $\mathcal{C}$ delle successioni di Cauchy in X è uno spazio vettoriale.

(2) Dati $x, y \in \mathcal{C}$, la relazione definita da $x \sim y \rightleftharpoons \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{C}$.

(3) Sia $\hat{X} = \mathcal{C}/\sim$. $\hat{X}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale normato con $\left\|[x]\right\|_{\hat{X}} = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

(4) $\hat{X}$ è completo.

(5) X si identifica in modo naturale con un sottospazio denso in $\hat{X}$.

La costruzione precedente, con qualche piccola modifica, può essere utilizzata per definire $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$.

Definizione 3.10. X spazio vettoriale topologico con la topologia τ. X è normabile se esiste una norma su X che induca su X la topologia τ.

A volte, l'aggettivo normabile viene riferito alla topologia piuttosto che allo spazio, cfr. Corollario 7.9.

Proposizione 3.11. X spazio vettoriale topologico. Sono equivalenti:

(i) X è normabile;

(ii) X contiene un aperto convesso limitato non vuoto;

(iii) l'origine ammette un intorno aperto convesso limitato.

Dimostrazione. Le implicazioni (i)⇒(ii) e (ii)⇒(iii) sono immediate.

(iii)⇒(i): sia $\mathcal{U}$ un intorno aperto convesso e limitato dell'origine. Allora esiste un intorno aperto $\mathcal{B}$ bilanciato tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ (Lemma 1.14) e quindi $\mathcal{B}$ è limitato. Sia $\mathcal{V}$ l'involucro convesso di $\mathcal{B}$. $\mathcal{V}$ è un intorno dell'origine (quindi è assorbente) ed è anche bilanciato, convesso e limitato (poiché $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$). Sia $\mu_{\mathcal{V}}$ il funzionale di Minkowski di $\mathcal{V}$. $\mu_{\mathcal{V}}$ è una norma per la Proposizione 2.17. Resta da dimostrare che $\mu_{\mathcal{V}}$ induce la stessa topologia di X. A tal fine basta osservare che $\{\alpha\mathcal{V} : \alpha > 0\}$ costituisce un sistema fondamentale di intorni dell'origine, grazie alla limitatezza di $\mathcal{V}$. □

Il seguente risultato viene spesso indicato come *"Teorema di quasi perpendicolarità di Riesz"*.

Proposizione 3.12. X spazio vettoriale normato. $W \subset X$ sottospazio proprio, non banale e chiuso di X. Allora per ogni $\alpha \in]0,1[$, esiste un $x_\alpha \in X$ tale che $\|x_\alpha\| = 1$ e $d(x_\alpha, W) \geq \alpha$.

Ovviamente, $d(x_\alpha, W) = \inf_{w \in W} d(x_\alpha, w) \leq d(x_\alpha, 0) = 1$. Un eventuale vettore x_1 tale che $\|x_1\| = 1$ e $d(x_1, W) = 1$ sarebbe *"perpendicolare"* a W.

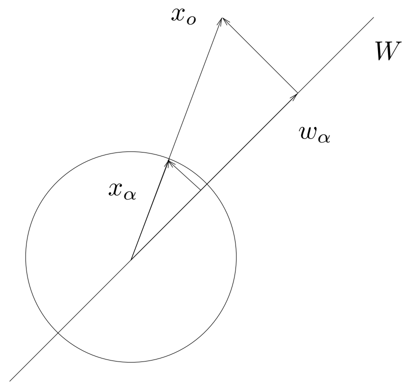

Figura 1: Dimostrazione della Proposizione 3.12

Dimostrazione. Sia $x_o \in X$ tale che $d(x_o, W) = d$, con $d > 0$. Fissato $\alpha \in]0,1[$, esiste un $w_\alpha \in W$ tale che $d(x_o, w_\alpha) \in \big[d, d/\alpha\big[$. Sia

$$x_\alpha = \frac{x_o - w_\alpha}{\|x_o - w_\alpha\|}\,.$$

Certamente $\|x_\alpha\| = 1$. Inoltre, per ogni $w \in W$ si ha

$$\begin{aligned}
\|w - x_\alpha\| &= \left\| w - \frac{x_o - w_\alpha}{\|x_o - w_\alpha\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\|x_o - w_\alpha\| w - x_o + w_\alpha}{\|x_o - w_\alpha\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\big(\|x_o - w_\alpha\| w + w_\alpha\big) - x_o}{\|x_o - w_\alpha\|} \right\| \\
&\geq \frac{d}{\|x_o - w_\alpha\|} \\
&\geq \frac{d}{d/\alpha} \\
&= \alpha\,.
\end{aligned}$$

Quindi $d(x_\alpha, W) \geq \alpha$. □

In generale, un vettore *"perpendicolare"* ad un sottospazio W può non esistere.

Proposizione 3.13. Sia $X = \Big\{x \in \mathbf{C^0}\big([0,1]\big) : x(0) = 0\Big\}$, munito della usuale norma *"del sup"* $\|x\| = \sup_{[0,1]} \big|x(t)\big|$. Sia $W = \Big\{x \in X \colon \int_0^1 x = 0\Big\}$. Allora non esiste nessun $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $d(x, W) = 1$.

Dimostrazione. Per assurdo, esista un tale x. Allora

$$\int_0^1 x < 1 \,. \tag{3.3}$$

D'altra parte, per ogni $y \in X \setminus W$, posto $\varphi(y) = \left(\int_0^1 x\right) / \left(\int_0^1 y\right)$ si ha che $x - \varphi(y)y \in W$. Allora

$$1 = d(x, W) \leq d(x, x - \varphi(y)y) = \big\|\varphi(y)y\big\| = \big|\varphi(y)\big| \cdot \|y\| = \frac{\left|\int_0^1 x\right|}{\left|\int_0^1 y\right|} \cdot \|y\|$$

quindi

$$\left| \int_0^1 x \right| \geq \frac{\left|\int_0^1 y\right|}{\|y\|} \,. \tag{3.4}$$

Sia $y(t) = 1 - (1-t)^n$. Allora $\|y\| = 1$, $\int_0^1 y = 1 - \frac{1}{n+1}$ e, per n abbastanza grande, la (3.4) non può essere soddisfatta in virtù della (3.3). □

L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (iv) nella proposizione seguente viene spesso indicata come *"Teorema di Riesz"*.

Proposizione 3.14. *X spazio vettoriale normato. Allora sono equivalenti:*

(i) $\dim X$ *finita.*

(ii) *I compatti di X sono tutti e soli i chiusi e limitati.*

(iii) *La sfera unitaria chiusa $\big\{x \in X \colon \|x\| \leq 1\big\}$ è compatta.*

(iv) *La superficie $\big\{x \in X \colon \|x\| = 1\big\}$ della sfera unitaria è compatta.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) è la proprietà di Heine–Borel.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): la sfera chiusa unitaria è (chiusa e) limitata.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): la superficie della sfera unitaria è un sottoinsieme chiuso della sfera chiusa.

(iv) $\Rightarrow$ (i): sia $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$. Se $X = \mathbb{K}x_0$, allora $\dim X$ è finita. Diversamente, esiste un $x_1 \in X \setminus \mathbb{K}x_0$ tale che $\|x_1\| = 1$ e $\|x_1 - x_0\| \geq 1/2$. Iterativamente, se $X \neq \operatorname{span}\{x_0, \ldots x_{n-1}\}$, sia x_n tale che $\|x_n\| = 1$ e

$$d\left(x_n, \operatorname{span}\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}\right) \geq 1/2 \,.$$

Per costruzione, la successione $n \mapsto x_n$ non contiene sottosuccessioni convergenti, quindi non può contenere infiniti elementi, quindi $\dim X < +\infty$. □

Nella proposizione precedente, il fatto che X sia normato è essenziale: cfr. Corollario 9.13.

Definizione 3.15. X SPAZIO VETTORIALE NORMATO.

$$X \text{ È UNIFORMEMENTE CONVESSO}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \colon \;\forall\, x, y \in X \text{ CON } \|x\| = \|y\| = 1 \text{ E } \|x - y\| \geq \varepsilon,$$
$$\left\| \tfrac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \,.$$

Il risultato seguente viene a volte indicato come *"Teorema della migliore approssimazione"*.

Proposizione 3.16. X spazio di Banach uniformemente convesso.

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq X \text{ chiuso convesso} \\ x_o \in X \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, k \in K \colon d(x_o, K) = d(x_o, k)\,.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esercizio 3.17. Enunciare e dimostrare i risultati del calcolo differenziale elementare nel caso di funzioni $f \colon X \mapsto Y$, con X e Y spazi normati o di Banach.

4 Spazi di Hilbert

Definizione 4.1. X SPAZIO VETTORIALE. PRODOTTO SCALARE O PRODOTTO INTERNO SU X È UN'APPLICAZIONE $\cdot \colon X \times X \mapsto \mathbb{K}$ CON LE PROPRIETÀ

(I) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \forall\, x, y, z \in X,\ (\lambda x + \mu y) \cdot z = \lambda x \cdot z + \mu y \cdot z;$

(II) $\forall\, x, y \in X,\ y \cdot x = \overline{x \cdot y};$

(III) $\forall\, x \in X \setminus \{0\},\ x \cdot x > 0.$

UNO SPAZIO VETTORIALE IN CUI È DEFINITO UN PRODOTTO SCALARE È UNO SPAZIO PREHILBERTIANO.

Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (II) diventa $x \cdot y = y \cdot x$.

Esempio 4.2. ℓ^2 è l'insieme delle successioni $x \colon \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ tali che $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$. In ℓ^2 è definito il prodotto scalare $x \cdot y = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot y_n$.
Lo spazio ℓ^2 sopra introdotto è uno spazio di Hilbert, cfr. Definizione 4.8.

Il risultato seguente viene spesso indicato come *"disuguaglianza di Schwarz"* o *"disuguaglianza di Cauchy – Schwarz"*.

Proposizione 4.3. X spazio prehilbertiano. Allora

$$\forall\, x, y \in X \quad |x \cdot y| \leq \sqrt{x \cdot x}\,\sqrt{y \cdot y}\,.$$

Si ha l'uguaglianza se e solo se x ed y linearmente sono dipendenti.

Dimostrazione. Sia $y \neq 0$, l'altro caso è immediato. Sia $\vartheta \in \mathbb{K}$, $|\vartheta| = 1$, tale che $\vartheta x \cdot y = |x \cdot y|$. Sia $f(t) = (x + t\vartheta y) \cdot (x + t\vartheta y)$. Per la Definizione 4.1 $f(t) \geq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\begin{aligned} f(t) &= x \cdot x + 2t\,\vartheta\,|x \cdot y| + t^2\,\vartheta^2\,y \cdot y \\ f'(t) &= 2\vartheta\,|x \cdot y| + 2t\,\vartheta^2\,y \cdot y \\ \min_{\mathbb{R}} f &= f\left(-|x \cdot y|/(\vartheta\,y \cdot y)\right) \\ &= x \cdot x - |x \cdot y|^2/\left(\vartheta\,y \cdot y\right)\,. \end{aligned}$$

Da $\min f \geq 0$ segue la disuguaglianza cercata. Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $f(t) = 0 \iff x + t\vartheta y = 0 \iff x = -t\vartheta y$. □

Proposizione 4.4. X spazio prehilbertiano. Allora X è uno spazio vettoriale normato con

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}\,.$$

Dimostrazione. Le proprietà (I), (II), (IV) della Definizione 3.1 sono immediate. La (III) segue dalla Proposizione 4.3:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2\,. \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.5. In uno spazio prehilbertiano, enunciare e dimostrare:

1. la continuità del prodotto scalare: se $x_n \to x_\infty$ e $y_n \to y_\infty$, allora $x_n \cdot y_n \to x_\infty \cdot y_\infty$;
2. l'uguaglianza del parallelogramma: $\forall\, x, y \in X,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$;
3. il Teorema di Pitagora: se $x_1, \ldots, x_n \in X$ con $x_i \cdot x_j = 0$ ogniqualvolta $i \neq j$, allora $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Definizione 4.6. X SPAZIO PREHILBERTIANO. SE $x, y \in X$ SONO TALI CHE $x \cdot y = 0$, x E y SI DICONO PERPENDICOLARI. SE $A \subseteq X$, $A^\perp = \{x \in X \colon \forall\, a \in A,\ x \cdot a = 0\}$.

Esercizio 4.7. X spazio prehilbertiano. $A \subseteq X$ non vuoto. Allora $A^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso di X.

Definizione 4.8. SPAZIO DI HILBERT È UNO SPAZIO PREHILBERTIANO COMPLETO.

Proposizione 4.9. X spazio di Hilbert, $K \subset X$ chiuso e convesso. Allora esiste un'unica applicazione $P_K \colon X \mapsto K$ caratterizzata da

$$\|x - P_K x\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|\,.$$

$P_K x$ è l'unico elemento di K che realizza la minima distanza di K da x.

Dimostrazione. Sia $d = \inf_{y \in K} \|x - y\|$. Per $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, sia $y_n \in K$ tale che $\|x - y_n\| < d + 1/n$. La successione $y \colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \mapsto X$ è di Cauchy. Infatti, per l'uguaglianza del parallelogramma e la convessità di K (Esercizio 4.5)

$$\begin{aligned} & \|y_n - y_m\|^2 \\ = \;& \big\|(x - y_n) - (x - y_m)\big\|^2 \\ = \;& 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - \big\|(x - y_n) + (x - y_m)\big\|^2 \\ \leq \;& 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\,\big\|x - (y_n + y_m)/2\big\|^2 \\ \leq \;& 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\,d^2\,. \end{aligned}$$

Per la completezza di X, esiste un y_∞ tale che $y_n \to y_\infty$. Per la chiusura di K, $y_\infty \in K$. Per costruzione, $\|x - y_\infty\| = d$. Se $z \in K$ è tale che $\|x - z\| = d$, allora con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned}
\|y_\infty - z\|^2 &= \big\|(x - y_\infty) - (x - z)\big\|^2 \\
&= 2\|x - y_\infty\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\big\|x - (y_\infty + z)/2\big\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

da cui l'unicità di P_K. □

La Proposizione 4.9 può essere dimostrata anche con le proposizioni 3.16 e 4.11.

Proposizione 4.10. X spazio di Hilbert, $V \subseteq X$ sottospazio chiuso. Allora $X = V \oplus V^\perp$.

Dimostrazione. Sia P la proiezione di minima distanza su V, cfr. Proposizione 4.9. Dato $x \in X$, siano $v = Px$ e $u = x - Px$. Ovviamente, $v \in V$.

Inoltre, $u \in V^\perp$, infatti sia $w \in V$ e sia $\vartheta \in \mathbb{K}$, $|\vartheta| = 1$, tale che $\vartheta u \cdot w \in \mathbb{R}$. La funzione $f(t) = \|u + t\,\vartheta\, w\|^2$ è un polinomio di secondo grado in t: $f(t) = \|u\|^2 + 2t\,\vartheta u \cdot w + t^2\|w\|^2$ ed ha minimo assoluto in $t = 0$, poichè $f(t) = \big\|x - (Px - t\,\vartheta\, w)\big\|^2$, cfr. Proposizione 4.9. Quindi $u \cdot w = 0$.

Sia ora $z \in V \cap V^\perp$. Allora, ovviamente, $z \cdot z = 0$, quindi $z = 0$. □

Proposizione 4.11. X spazio prehilbertiano. Allora X è uno spazio vettoriale uniformemente convesso.

Dimostrazione. Conseguenza immediata dell'Esercizio 4.5. □

5 Applicazioni Lineari

Definizione 5.1. X, Y SPAZI VETTORIALI.

$$T\colon X \mapsto Y \text{ È LINEARE } \rightleftharpoons \begin{cases} \forall\, x_1, x_2 \in X,\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \\ T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2\,. \end{cases}$$

NUCLEO ED IMMAGINE DI T SONO, RISPETTIVAMENTE,

$$\operatorname{rnk}(T) = T(X) \qquad \ker(T) = T^{-1}(\{0\})\,.$$

Proposizione 5.2. X, Y spazi vettoriali. $T\colon X \mapsto Y$ lineare. Allora:

(1) $T0 = 0$;

(2) $\operatorname{rnk}(T)$ è un sottospazio vettoriale di Y;

(3) $\ker(T)$ è un sottospazio vettoriale di X;

(4) T iniettiva $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$;

(5) $V \subseteq X$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow T(V)$ sottospazio di Y;

(6) $C \subseteq X$ convesso $\Rightarrow T(C)$ convesso;

(7) $B \subseteq X$ bilanciato $\Rightarrow T(B)$ bilanciato;

(8) $V \subseteq Y$ sottospazio vettoriale $\Rightarrow T^{-1}(V)$ sottospazio di X;

(9) $C \subseteq Y$ convesso $\Rightarrow T^{-1}(C)$ convesso;

(10) $B \subseteq Y$ bilanciato $\Rightarrow T^{-1}(B)$ bilanciato.

Esercizio 5.3. Dimostrare la Proposizione 5.2.

Proposizione 5.4. *X, Y spazi vettoriali topologici. $T: X \mapsto Y$ lineare. Sono equivalenti:*

(1) *T è uniformemente continua su X;*

(2) *T è uniformemente continua su un aperto non vuoto in X;*

(3) *T è continua su X;*

(4) *T è continua in 0;*

(5) *T è continua in un punto di X.*

Dimostrazione. Le implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (5) e (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) sono immediate.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sia T continua in x_* e sia $y_* = Tx_*$. Allora, per ogni intorno $\mathcal{V}$ di 0 in Y, esiste un intorno $\mathcal{U}$ di 0 in X tale che $T(x_* + \mathcal{U}) \subseteq y_* + \mathcal{V}$. Ne segue che comunque presi x_1, x_2 in X con $(x_1 - x_2) \in \mathcal{U}$, si ha che $(Tx_1 - Tx_2) \in \mathcal{V}$, da cui la tesi. □

Esempio 5.5. In spazi di dimensione infinita esistono funzioni lineari non continue.

Sia $X = \mathbf{C^1}\big([-1,1]\big)$ munito della norma *"del sup"* $\|x\|_\infty = \sup_{[0,1]} \big|x(t)\big|$. Sia $D: X \mapsto \mathbb{R}$ definito da $Dx = x'(0)$. D è lineare ma non è continua. Sia infatti $x_n = \frac{1}{n}\sin(n^2 t)$. Allora $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ ma $\lim\limits_{n\to+\infty} Dx_n = +\infty$.

Proposizione 5.6. *X, Y spazi vettoriali topologici. $T: X \mapsto Y$ lineare.*

$$TX \text{ limitato} \iff T = 0\,.$$

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 1.21. □

In virtù della proposizione precedente, per le applicazioni *lineari* alla nozione di limitatezza viene comunemente assegnato un significato diverso da quello usuale.

Definizione 5.7. X, Y SPAZI VETTORIALI NORMATI. $T: X \mapsto Y$ LINEARE.

$$\begin{aligned} T \text{ È LIMITATA} \quad &\rightleftharpoons \quad \sup\left\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \le 1\right\} < +\infty\,; \\ \|T\| \quad &= \quad \sup\left\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \le 1\right\}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5.8. X, Y spazi vettoriali normati. $T\colon X \mapsto Y$ lineare. Allora $\sup\left\{\|Tx\|_Y \colon \|x\|_X \le 1\right\} = \sup\left\{\|Tx\|_Y \colon \|x\|_X = 1\right\}$.

Proposizione 5.9. X, Y spazi vettoriali normati. $T\colon X \mapsto Y$ lineare e limitata. Allora

$$\|Tx\|_Y \le \|T\| \cdot \|x\|_X .$$

Dimostrazione. Sia $x \neq 0$, altrimenti la disuguaglianza è ovvia. $\|Tx\|_Y = \left\|T\left(\|x\|_X \cdot \frac{1}{\|x\|_X} \cdot x\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{1}{\|x\|_X} \cdot x\right)\right\| \|x\|_X \le \|T\| \cdot \|x\|_X$. □

Proposizione 5.10. X, Y spazi vettoriali normati. $T\colon X \mapsto Y$ lineare. Sono equivalenti:

(1) T è continua su X;

(2) T è uniformemente continua su X;

(3) T è limitata;

(4) T è Lipschitziana.

Dimostrazione. (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dalla Proposizione 5.4.

(1) $\Rightarrow$ (3): La funzione $\varphi\colon X \mapsto \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = \|Tx\|_Y$ è continua, quindi l'insieme $A = \{x \in X \colon \varphi(x) < 1\}$ contiene un aperto. Sia $r > 0$ tale che $B_X(0,r) \subseteq A$. Ne segue che $\sup\left\{\|Tx\|_Y \colon \|x\|_X < r\right\} \le 1$ e, quindi, $\|T\| \le 1/r$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Per la Proposizione 5.9, $\|Tx_2 - Tx_1\| = \left\|T(x_2 - x_1)\right\| \le \|T\| \cdot \|x_2 - x_1\|$.

(4) $\Rightarrow$ (1): noto. □

Proposizione 5.11. X, Y spazi vettoriali normati. Allora:

1. Lo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ delle applicazioni lineari continue $X \mapsto Y$ è uno spazio vettoriale normato.
2. La convergenza in $\mathcal{L}(X,Y)$ è la convergenza uniforme sui limitati.
3. Se Y è di Banach, anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è di Banach.

Dimostrazione. Immediata. □

Nella Proposizione 5.11, la completezza di $\mathcal{L}(X,Y)$ segue dalla completezza di Y, indipendentemente dalla completezza o meno di X.

Esercizio 5.12. X spazio vettoriale normato su $\mathbb{K}$. Dimostrare che $\mathcal{L}(\mathbb{K},X)$ si identifica con X.

Esercizio 5.13. X, Y spazi vettoriale topologici, $V \subset X$ sottospazio proprio, $u \in X \setminus V$. Per ogni $y \in Y$, l'applicazione $T\colon V \oplus \mathbb{K}u \mapsto Y$ definita da $T(v+\lambda u) = \lambda y$ è lineare e continua.

Esercizio 5.14. Sia $X = \mathbf{C^0}(K,\mathbb{R})$ munito della norma del sup, con $K \subset \mathbb{R}$ compatto non vuoto. Sia $t_o \in K$. Dimostrare che l'applicazione $P\colon X \mapsto X$ definita da $(Px)(t) = \int_{t_o}^{t} x(\tau)\, d\tau$ è lineare e continua (anche Lipschitziana). Determinarne autovettori ed autovalori.

5.1 Il Duale

Definizione 5.15. X SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO SU $\mathbb{K}$. IL DUALE DI X È L'INSIEME $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ DEI FUNZIONALI LINEARI CONTINUI $X \mapsto \mathbb{K}$.

Proposizione 5.16. X spazio vettoriale topologico. $x' : X \mapsto \mathbb{K}$ lineare non nullo. Sono equivalenti:

(1) $x' \in X'$;

(2) $\ker x'$ è chiuso;

(3) $\ker x'$ non è denso in X;

(4) x' è limitata in un intorno di 0.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2): ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (3): segue da $x' \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): sia $x_* \in X \setminus \overline{(\ker x')}$. Allora esiste un intorno bilanciato $\mathcal{U}$ di 0 tale che $(x_* + \mathcal{U}) \cap \ker x' = \emptyset$. L'insieme $x'(\mathcal{U})$ è bilanciato (cfr. Proposizione 5.2), quindi o $x'(\mathcal{U}) = \mathbb{K}$, o $x'(\mathcal{U})$ è limitato.

Se $x'(\mathcal{U}) = \mathbb{K}$, allora esiste un $x \in \mathcal{U}$ tale che $x'(x) + x'(x_*) = 0$, in contraddizione con la scelta di $\mathcal{U}$.

Se $x'(\mathcal{U})$ è limitata, la tesi è dimostrata.

(4) $\Rightarrow$ (1): esistono un intorno $\mathcal{U}$ di 0 ed un $M > 0$ tali che $\sup \left| x'(\mathcal{U}) \right| \leq M$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, $\sup \left| x'(\frac{\varepsilon}{M}\mathcal{U}) \right| \leq \varepsilon$, da cui la continuità di x' in 0 e la tesi per la Proposizione 5.4. □

Proposizione 5.17. X spazio vettoriale topologico. $x' \in X'$ non nullo. Allora

(1) $\dim \left(X / \ker x' \right) = 1$;

(2) $\ker x'$ è un sottospazio massimale;

(3) $\exists\, x_* \in X$ tale che $X = \mathbb{K}x_* \oplus \ker x'$.

Dimostrazione. Sia $x_* \in X$ tale che $x'(x_*) \neq 0$. Allora, ogni x in X può essere scritto $x = \left(x - \frac{x'(x)}{x'(x_*)} x_* \right) + \frac{x'(x)}{x'(x_*)} x_*$, dove $\left(x - \frac{x'(x)}{x'(x_*)} x_* \right) \in \ker x'$ e $\frac{x'(x)}{x'(x_*)} x_* \in \mathbb{K}x_*$. Da cui la tesi. □

Corollario 5.18. X spazio vettoriale normato. Allora X' ha una naturale struttura di spazio vettoriale normato con

$$\left\| x' \right\|_{X'} = \sup \left\{ \left| x'(x) \right| : \|x\|_X = 1 \right\} .$$

Inoltre, X' è completo.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 5.11. □

Proposizione 5.19. X spazio vettoriale normato, $Y \subseteq X$ sottospazio vettoriale.

$$\bar{Y} = X \Longrightarrow Y' = X' .$$

Dimostrazione. Se $y' \in Y'$, allora y' è uniformemente continuo e può essere esteso in un unico modo ad un funzionale lineare e continuo su X, quindi $Y' \subseteq X$. L'altra inclusione è immediata. □

Esercizio 5.20. X spazio vettoriale normato. Dimostrare che X ed il suo completamento $\hat{X}$ (cfr. Definizione 3.8) hanno lo stesso duale.

Proposizione 5.21. X, Y spazi vettoriali normati. $j\colon X \mapsto Y$ immersione (i.e. applicazione lineare, continua e iniettiva). Allora esiste un'immersione $j'\colon Y' \mapsto X'$.

Dimostrazione. Sia $j'(y') = y' \circ j$. □

La Proposizione 5.21 suggerisce un metodo per costruire spazi *"grossi"*: come duali di spazi *"piccoli"*.

Proposizione 5.22. X spazio di Hilbert. Allora X è identificabile con X'.

Dimostrazione. Sia $j\colon X \mapsto X'$ definita da $(jx)(y) = y \cdot x$. jx è lineare e continua: $\left|(jx)(y)\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, quindi $\|jx\| \leq \|y\|$.

j è iniettiva: se $jx_1 = j_2$, allora per ogni $y \in X$, $(jx_2 - jx_1) \cdot y = 0$, quindi $jx_1 = jx_2$.

j è suriettiva: se $x' \in X'$, sia $u \in (\ker x')^\perp$ con $\|u\| = 1$, cfr. Proposizione 4.10. Si ha che $x' = \overline{x'(u)}\, u$. Infatti, se $x \in X$, $x = v + \lambda u$ con $v \in \ker x'$,

$$\begin{array}{rclcl} x'(x) & = & x'(v+\lambda u) & = & \lambda\, x'(u) \\ x \cdot \left(\overline{x'(u)}\, u\right) & = & x'(u)\,(v+\lambda u)\cdot u & = & \lambda\, x'(u)\,. \end{array}$$

□

Proposizione 5.23. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ spazio di mi¡sura σ–finito. Allora

(1) $p \in \left]0,1\right[$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{L^p}(X, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$ è uno spazio metrico vettoriale con $d(x,y) = \left(\int_X \left|y(t) - x(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$ il cui duale contiene il solo funzionale nullo.

(2) $p \in [1, \infty]$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{L^p}(X, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$ è uno spazio di Banach con $\|x\|_p = \left(\int_X \left|x(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$.

(3) $p \in [1, \infty[$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{L^p}(X, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$ ha duale $\mathbf{L^q}(X, \mathcal{S}, \mu; \mathbb{R})$, se e solo se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

dove si è posto "$1/\infty = 0$", come di consueto in questo ambito.

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1, 5, 6, 12] □

(1) della Proposizione 5.23, in virtù del Corollario 6.10, implica che per $p \in \left]0,1\right[$, $\mathbf{L^p}$ non è localmente convesso.

Il risultato seguente è spesso indicato come *"Teorema di rappresentazione di Riesz"*.

Proposizione 5.24. $\Omega \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia $\mathbf{C^0_c}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $\Omega \mapsto \mathbb{K}$ continue ed aventi supporto compatto. Allora

(1) $\mathbf{C^0_c}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale normato con $\|u\| = \sup_{x \in \Omega} \left|u(x)\right|$.

(2) $\mathbf{C^0_c}(\Omega)$ non è uno spazio di Banach.

(3) Per ogni $u' \in \left(\mathbf{C^0_c}(\Omega)\right)'$, esiste un'unica misura di Radon μ tale che

$$u'(u) = \int_\Omega u \, d\mu$$

ed inoltre $\left\|u'\right\| = |\mu|(\Omega)$.

Nell'enunciato precedente, per *"misura di Radon"* si intende una misura complessa, definita sui Borelliani, a variazione totale limitata e regolare.

Dimostrazione. Omessa, cfr. [5, 6, 10, 12] □

6 Teoremi di Hahn – Banach

Definizione 6.1. X SPAZIO VETTORIALE, $p: X \mapsto \mathbb{R}$.

$$p \text{ È SUBADDITIVA} \quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in X\,, \\ p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)\,. \end{cases}$$

$$p \text{ È POSITIVAMENTE OMOGENEA} \quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \forall x \in X,\ \forall \lambda \in [0, +\infty[\ , \\ p(\lambda x) = \lambda p(x)\,. \end{cases}$$

Nella proposizione seguente l'ordinamento di $\mathbb{R}$ è essenziale.

Proposizione 6.2. X spazio vettoriale. $V \subset X$ sottospazio proprio tale che $X = V \oplus \mathbb{R}u$, $u \neq 0$. $p: X \mapsto [0, +\infty[$ subadditiva e positivamente omogenea. $T: V \mapsto \mathbb{R}$ applicazione lineare tale che $Tv \leq p(v)$ per ogni $v \in V$. Allora esiste un'estensione $\hat{T}: X \mapsto \mathbb{R}$ lineare tale che $\left|\hat{T}x\right| \leq p(x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\hat{T}: X \mapsto \mathbb{R}$ definita da $\hat{T}(v + \lambda u) = Tv + \gamma\lambda$. $\hat{T}$ è un'estensione lineare di T, cfr. Esercizio 5.13. Inoltre, se $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{lcl} \hat{T}(v + \lambda u) \leq p(v + \lambda u) & \Rightarrow & \gamma \leq p(\lambda^{-1}v + u) - T(\lambda^{-1}v) \\ \hat{T}(v - \lambda u) \leq p(v - \lambda u) & \Rightarrow & \gamma \geq -p(\lambda^{-1}v - u) + T(\lambda^{-1}v) \end{array}$$

Resta da dimostrare che

$$\sup_{v \in V} \big(-p(v - u) + T(v)\big) \leq \inf_{v \in V} \big(p(v + u) - T(v)\big)\ .$$

Infatti, per $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{array}{rcl} Tv_1 + Tv_2 & = & T(v_1 + v_2) \\ & \leq & p(v_1 + v_2) \\ & = & p\big((v_1 - u) + (v_2 + u)\big) \\ & \leq & p(v_1 - u) + p(v_2 + u) \end{array}$$

da cui $Tv_1 - p(v_1 - u) \leq p(v_2 + u) - Tv_2$. Infine, $-\hat{T}x = \hat{T}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, da cui $\left|\hat{T}x)\right| \leq p(x)$ □

La non unicità dell'estensione è causata dallla libertà di scelta di γ in

$$\left[\sup_{v \in V} \big(-p(v - u) + T(v)\big)\,,\ \inf_{v \in V} \big(p(v + u) - T(v)\big)\right]\ .$$

Il seguente è uno dei risultati noti come *Teorema di Hahn – Banach*.

Proposizione 6.3. X spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. $V \subset X$ sottospazio. $p: X \mapsto [0, +\infty[$ subadditiva e positivamente omogenea. $T: V \mapsto \mathbb{R}$ applicazione lineare. Allora esiste un'estensione $\hat{T}: X \mapsto \mathbb{R}$ di T, lineare e tale che $\left|\hat{T}x\right| \leq p(x)$ per ogni x in X.

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{A} = \left\{ (Y, L) \in \mathcal{P}(X) \times \mathbb{R}^X : \left\{ \begin{array}{l} Y \text{ sottospazio, } Y \supseteq V \\ L \text{ lineare, } L\Big|_V = T \\ Lx \leq p(x)\ \forall x \in Y \end{array} \right. \right\}$$

$\mathcal{A}$ è un insieme non vuoto, parzialmente ordinato ed induttivo. Infatti

(a) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ poichè $(V, T) \in \mathcal{A}$;

(b) una relazione d'ordine parziale in $\mathcal{A}$ è data da

$$(Y', L') \preceq (Y'', L'') \rightleftharpoons Y' \subseteq Y'' \text{ e } L''\Big|_{Y'} = L'$$

(c) $\mathcal{A}$ è induttivo: se $\mathcal{B} = \{(Y_\alpha, L_\alpha) : \alpha \in I\}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{A}$ totalmente ordinato, allora un estremo superiore di $\mathcal{B}$ è $(\hat{Y}, \hat{L})$ definito da $\hat{Y} = \bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ e $\hat{L}x = L_\alpha x$ se $x \in Y_\alpha$.

Per il Lemma di Zorn (cfr. Proposizione 10.10), $\mathcal{A}$ ammette un elemento massimale (Y, L). Si ha che $Y = X$, infatti, se esistesse un $u \in X \setminus Y$, allora la Proposizione 6.2 permetterebbe la costruzione della coppia $(Y \oplus \mathbb{R}u, T_u)$, estensione propria di (Y, L). □

Esercizio 6.4. Dimostrare la Proposizione 6.3 senza utilizzare il Lemma di Zorn ma con in più l'ipotesi che esista un insieme numerabile di vettori linearmente indipendenti U disgiunto da V e tale che $\operatorname{span} V \cup U = X$.

Esercizio 6.5. Verificare che l'applicazione $\hat{L}$ introdotta nella dimostrazione della Proposizione 6.3 è lineare e ben definita.

Esercizio 6.6. L'ordinamento parziale introdotto nella dimostrazione della Proposizione 6.3 su $\mathcal{A}$ è anche totale?

Corollario 6.7. X spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. $V \subset X$ sottospazio proprio. $p: X \mapsto \mathbb{R}$ seminorma. $T: V \mapsto \mathbb{C}$ lineare tale che $|Tv| \leq p(v)$ per ogni $v \in V$. Allora esiste un'estensione $\hat{T}: X \mapsto \mathbb{C}$ di T lineare e tale che $\left|\hat{T}x\right| \leq p(x)$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. X può esssere visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $Lv = \operatorname{Re}(Tv)$, per $v \in V$. L è un'applicazione lineare tale che $|Lv| \leq |Tv| \leq p(v)$ per ogni $v \in V$. Sia $\hat{L}$ un'estensione di L a tutto X soddisfacente a $\left|\hat{L}x\right| \leq p(x)$ per ogni $x \in X$, ottenuta attraverso la Proposizione 6.3.

Tornando a vedere X come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, sia $\hat{T}x = \hat{L}x - i\hat{L}(ix)$, per ogni $x \in X$. $\hat{T}$ è lineare su X visto come spazio su $\mathbb{C}$. Inoltre, $\hat{T}$ è un'estensione di T poichè se $v \in V$, allora

$$\begin{aligned} \hat{T}v &= \hat{L}v - i\hat{L}(iv) \\ &= Lv - iL(iv) \\ &= \mathrm{Re}(Tv) - i\,\mathrm{Re}\big(T(iv)\big) \\ &= \mathrm{Re}(Tv) + i\,\mathrm{Im}(Tv) \\ &= Tv \end{aligned}$$

Infine, per ogni $x \in X$ e per un opportuno $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, $\left|\hat{T}x\right| = z\hat{T}x = \hat{T}(zx)$. D'altra parte, $|Tx| \in \mathbb{R}$, quindi $\hat{T}(zx)$ coincide con la sua parte reale e $\hat{T}(zx) = \hat{L}(zx) \leq p(zx) = |z| \cdot p(x) = p(x)$. □

Corollario 6.8. X spazio vettoriale localmente convesso. $p\colon X \mapsto \mathbb{R}$ seminorma. $x_* \in X$. Allora, esiste un $x'_* \in X'$ tale che $x'_*(x_*) = p(x_*)$ e, per ogni $x \in X$, $\left|x'_*(x)\right| \leq p(x)$.

Dimostrazione. Se $x_* = 0$, allora basta definire $x'_* = 0$. Sia quindi $x_* \neq 0$. Sia $V = \mathbb{K}x_*$ e $T\colon V \mapsto \mathbb{K}$ definita da $T(\lambda x_*) = \lambda p(x_*)$. x'_* è un'estensione di T a X ottenuta attraverso la Proposizione 6.3 nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ed attraverso il Corollario 6.7 nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

Corollario 6.9. X spazio vettoriale localmente convesso non banale. Allora X' è non banale.

Dimostrazione. Immediata. □

Il risultato seguente viene a volte chiamato *"Teorema del sufficiente numero di funzionali"*.

Corollario 6.10. X spazio vettoriale localmente convesso. Allora

1. X' è non banale.
2. $\forall\, x_1, x_2 \in X$, $\exists\, x' \in X'$ tale che $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.
3. L'applicazione $\varphi\colon X \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{K})$ definita da $\varphi(x) = \left\{x'(x) \colon x' \in X'\right\}$ è iniettiva.

Dimostrazione. Immediata. □

Corollario 6.11. X spazio vettoriale localmente convesso. $\mathcal{U}$ intorno di 0 convesso e bilanciato.

$$x_* \in X \setminus \mathcal{U} \Longrightarrow \exists\, x'_* \in X' \colon x'_*(x_*) \geq 1 \geq \sup_{x \in \mathcal{U}} \left|x'_*(x)\right|.$$

Se $\mathcal{U}$ è chiuso la prima disuguaglianza è stretta.

Dimostrazione. Applicare il Corollario 6.8 scegliendo come p il funzionale di Minkowski di $\mathcal{U}$. Si ottiene un $x'_* \in X'$ tale che $x'_*(x_*) = p(x_*) \geq 1 \geq \sup_{x \in \mathcal{U}} p(x) \geq \sup_{x \in \mathcal{U}} \left|x'_*(x)\right|$. Se $\mathcal{U}$ è chiuso, $p(x_*) > 1$. □

Corollario 6.12. X spazio vettoriale localmente convesso. $C \subseteq X$ convesso chiuso. Allora

$$x \in C \Longleftrightarrow \forall\, x' \in X' \;\exists\, c \in C\colon \operatorname{Re} x'(c) \geq \operatorname{Re} x'(x)\,.$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è immediata. L'implicazione $\Leftarrow$ equivale a:

$$x \in X \setminus C \Rightarrow \exists\, x' \in X'\colon \operatorname{Re} x'(x) > \sup_C \operatorname{Re} x'\,.$$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: siano $c_* \in C$ e $C_* = -c_* + C$. C_* è un convesso chiuso contenente l'origine. Per ogni $r > 0$, l'insieme $C_r = B(C_*, r)$ è un convesso, chiuso, assorbente e bilanciato. Se $x \in X \setminus C$, allora $x - c_* \in X \setminus C_*$ ed esiste un $r_* > 0$ tale che $x - c_* \in X \setminus C_{r_*}$. Per il Corollario 6.12, esiste un $x' \in X'$ tale che $x'(x - c_*) > \sup_{C_{r_*}} x' \geq \sup_{C_*} x'$, da cui la tesi.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: X è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Per quanto su dimostrato, esiste un $x'_{\mathbb{R}}$ tale che $x'_{\mathbb{R}}(x) > \sup_C x'_{\mathbb{R}}$. Sia $x' \in X'$ il funzionale lineare su $\mathbb{C}$ di cui $x'_{\mathbb{R}}$ è la parte reale. □

Corollario 6.13. X spazio vettoriale localmente convesso. $V \subset X$ sottospazio vettoriale chiuso.

$$x \in X \setminus V \Longleftrightarrow \exists\, x' \in X'\colon x'(x) = 1 \text{ e } x'\Big|_V = 0\,.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon V \oplus \mathbb{K}x \mapsto \mathbb{K}$ data da $\varphi(v + \lambda x) = \lambda$. x' è un'estensione di φ a X, cfr. Esercizio 5.13. □

Corollario 6.14. X spazio vettoriale normato su $\mathbb{K}$. V sottospazio di X. $T\colon X \mapsto \mathbb{R}$ lineare continua. Allora esiste un'estensione $\hat{T}\colon X \mapsto \mathbb{R}$ di T lineare e continua e tale che $\left\|\hat{T}\right\| = \|T\|$.

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 6.3 con $p(x) = \|T\| \cdot \|x\|$. □

Corollario 6.15. X spazio vettoriale normato. $x_* \in X$. Allora, esiste un $x'_* \in X'$ tale che $\left\|x'_*\right\| = 1$ e $x'_*(x_*) = \|x_*\|$.

Dimostrazione. Applicare il Corollario 6.8 con $p(x) = \|x\|$. □

Corollario 6.16. $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ spazio di misura σ–finito.

$$p \in \,]0,1[\; \Longrightarrow \mathbf{L}^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{S}, \mu) \text{ non è localmente convesso.}$$

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 5.23 ed il Corollario 6.10. □

7 Topologia Debole

Proposizione 7.1. X spazio vettoriale normato. X' duale di X. Allora l'insieme $\{p_{x'}\colon x' \in X'\}$ dove

$$p_{x'}(x) = \left|x'(x)\right|$$

è una famiglia separante di seminorme su X.

Dimostrazione. Segue dal Corollario 6.10. □

Definizione 7.2. La topologia di spazio vettoriale seminormato indotta da X' su X è la Topologia Debole su X.

Nel seguito, questa topologia sarà indicata con τ_w (w per *weak*) mentre quella indotta dalla norma con τ_s (s per *strong*).

Proposizione 7.3. X spazio vettoriale normato. Allora $\tau_w \subseteq \tau_s$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che ogni intorno fondamentale dell'origine in τ_w contiene un aperto forte in τ_s contenente l'origine. Infatti, sia $\mathcal{U}$ un intorno fondamentale di 0. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \Big\{x \in X \colon \big|x_i'(x)\big| < r_i\,,\ i = 1, \ldots, n\Big\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\big|x_i'\big|\Big)^{-1} (]-\infty, r_i[)\end{aligned}$$

per opportuni $x_1', \ldots, x_n' \in X'$ e $r_1, \ldots, r_n$ strettamente positivi. $\mathcal{U}$ è intersezione di n aperti in τ_s. quindi è fortemente aperto. □

Proposizione 7.4. X spazio vettoriale normato.

$$\dim X < \infty \Longrightarrow \tau_w = \tau_s\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

Le due proposizioni precedenti saranno completate dal Corollario 7.10.

Corollario 7.5. X spazio vettoriale normato. $K \subseteq X$.

$$K \text{ fortemente compatto} \Longrightarrow K \text{ debolmente compatto.}$$

Dimostrazione. Conseguenza immediata della Proposizione 7.3. □

Quindi, in dimensione infinita, la topologia debole possiede più compatti della topologia forte.

Proposizione 7.6. X spazio vettoriale normato, $\dim X = \infty$. $A \subseteq X$.

$$A \text{ debolmente aperto, } 0 \in A \Longrightarrow A \text{ contiene un sottospazio vettoriale.}$$

Dimostrazione. Sia A un insieme debolmente aperto contenente l'origine. Allora esiste un intorno fondamentale $\mathcal{U}(x_1', \ldots, x_n'; r_1, \ldots, r_n)$ contenuto in A. Sia N_i il nucleo di x_i'. Poiché

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} N_i = n\,,$$

si ha che il sottospazio $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ è non banale. Sia $x \in \bigcap_{i=1}^{n} N_i$ con $x \neq 0$. Allora $\mathbb{K}x \subseteq \mathcal{U} \subseteq A$. □

Nella Proposizione 7.6 l'ipotesi $\dim X = \infty$ è essenziale, altrimenti ci sarebbe contraddizione con la Proposizione 7.3.

Esercizio 7.7. Dove è stata usata l'ipotesi "$\dim X = \infty$" nella Proposizione 7.6?

Corollario 7.8. X spazio vettoriale normato, $\dim X = \infty$. $A \subseteq X$.

$$A \text{ debolmente aperto } \Longrightarrow A \text{ fortemente illimitato.}$$

Dimostrazione. Applicare le proposizioni 7.6 e 1.21. □

Corollario 7.9. X spazio vettoriale normato.

$$\dim X = \infty \Longrightarrow \tau_w \text{ non è normabile.}$$

Dimostrazione. Applicare le proposizioni 3.11 e 7.6. □

Corollario 7.10. X spazio vettoriale normato.

$$\dim X = \infty \Longrightarrow \tau_w \subset \tau_s\,.$$

(L'inclusione è stretta).

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 7.11. Mostrare che nel Corollario 7.10 l'ipotesi "X normato" è essenziale.

Corollario 7.12. X spazio vettoriale normato, $\dim X = \infty$. Una sfera fortemente aperta non è debolmente aperta.

Dimostrazione. Immediata. □

Corollario 7.13. X spazio vettoriale normato, $\dim X = \infty$. Una sfera fortemente aperta ha parte interna vuota rispetto alla topologia debole.

Dimostrazione. Immediata. □

Proposizione 7.14. X spazio vettoriale normato. Allora ogni elemento di X' è continuo rispetto a τ_w.

Dimostrazione. Immediata. □

Corollario 7.15. X spazio vettoriale normato. Sia X'_w l'insieme dei funzionali lineari $X \mapsto \mathbb{K}$ continui rispetto a τ_w. Allora $X' = X'_w$.

Dimostrazione. L'inclusione $X' \subseteq X'_w$ segue dalla Proposizione 7.14. L'altra inclusione dalla Proposizione 7.3. □

Proposizione 7.16. X spazio vettoriale normato. $C \subseteq X$ convesso. Allora

$$C \text{ fortemente chiuso} \Longleftrightarrow C \text{ debolmente chiuso.}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ segue dalla Proposizione 7.3. Viceversa, sia C (convesso e) fortemente chiuso. Se $C = X$, la tesi è ovvia. Sia quindi $x_o \in (X \setminus C)$. Allora, per il Teorema di Hahn – Banach (Corollario 6.12), esiste un $x'_o \in X'$ che separa x_o da C, vale a dire $\sup_C \operatorname{Re} x'_o < \operatorname{Re} x'_o(x)$. Sia $\mathcal{U} = \left\{x \in X \colon \operatorname{Re} x'_o(x) > \sup_C \operatorname{Re} x'_o\right\}$. $\mathcal{U}$ è debolmente aperto (Proposizione 7.14), $x_o \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subseteq (X \setminus C)$. Quindi $X \setminus C$ è debolmente aperto, da cui la tesi. □

Nella Proposizione 7.16 la convessità è essenziale (esclusivamente nel caso $\dim X = \infty$), come mostra la Prosizione 7.17.

Proposizione 7.17. *X spazio vettoriale normato con $\dim X = \infty$. Allora la chiusura debole della superficie della sfera unitaria è l'intera sfera unitaria chiusa.*

Dimostrazione. Sia $S = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$ la superficie della sfera unitaria. Sia $\bar{x} \in X$ con $\|\bar{x}\| < 1$. Sia $\mathcal{U}$ un intorno debole di $\bar{x}$. Allora, per la Proposizione 7.6, esiste un $v \in X$ tale che $(\bar{x} + \mathbb{K}v) \subseteq \mathcal{U}$. Sia $\varphi \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ data da $\varphi(\lambda) = \|\bar{x} + \lambda v\|$. φ è continua, $\varphi(0) < 1$ e $\lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$. Sia $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(\lambda_*) = 1$. Sia $x_* = \bar{x} + \lambda_* v$. x_* appartiene alla superficie della sfera unitaria.

Quindi, qualunque sia $\bar{x} \in B(0, 1)$, ogni intorno debole di $\bar{x}$ interseca S. Ne segue che

$$B(0, 1) \subseteq (\text{chiusura debole di } S) .$$

Quindi

$$S \subseteq \overline{B(0, 1)} \subseteq (\text{chiusura debole di } S) .$$

Per la Proposizione 7.16 segue la tesi. □

Proposizione 7.18. *X spazio vettoriale normato. Sia $f \colon X \mapsto \mathbb{R}$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente rispetto a τ_s. Allora f è semicontinua inferiormente anche rispetto a τ_w.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme $A_\lambda = \Big\{x \in X \colon f(x) \leq \lambda\Big\}$ è debolmente chiuso. A_λ è convesso per la convessità di f. A_λ è chiuso perché f è semicontinua inferiormente. Quindi, A_λ è anche debolmente chiuso per la Proposizione 7.16. □

Corollario 7.19. *X spazio vettoriale normato. Allora la norma è semicontinua inferiormente rispetto a τ_w.*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 7.18. □

Il seguente risultato viene spesso indicato come *"Primo Principio di Limitatezza Uniforme"*.

Proposizione 7.20. *X spazio vettoriale normato. $E \subseteq X$.*

$$E \text{ fortemente limitato} \iff E \text{ debolmente limitato.}$$

Dimostrazione. Per la Definizione 1.7, si tratta di dimostrare che

$$\sup_{x \in E} \|x\| < \infty \iff \forall\, x' \in X' \quad \sup_{x \in E} \big|x'(x)\big| < \infty .$$

L'implicazione $\Rightarrow$ è ovvia.

Implicazione $\Leftarrow$. Sia

$$E'_n = \left\{ x' \in X' \colon \sup_{x \in E} \big|x'(x)\big| \leq n \right\} .$$

Per ipotesi, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n = X'$. Per il Corollario 10.8 al Teorema di Baire, applicabile grazie alla Proposizione 5.18, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ ed esiste un $\bar{x}' \in X'$ tali che $\bar{x}'$ appartiene alla parte interna di $E'_{\bar{n}}$. Sia $r > 0$ tale che $B\big(\bar{x}', r\big) \subseteq \mathring{E}'_{\bar{n}}$.

Preso un $x \in E$, sia $x' \in X'$ tale che $x'(x) = \|x\|$ e $\|x'\| = 1$, cfr. il Corollario 6.15. Allora, detto $z' = \frac{r}{2}x' + \bar{x}'$, si ha $z' \in B(\bar{x}', r)$ e

$$\begin{aligned} \|x\| &= x'(x) \\ &= \left(\frac{2}{r}(z' - \bar{x}')\right)(x) \\ &= \frac{2}{r} \cdot \left(z'(x) - \bar{x}'(x)\right) \\ &\leq \frac{2}{r} \cdot 2\bar{n} \\ &= \frac{4\bar{n}}{r} \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di x segue la tesi. □

Quando un insieme è limitato non è quindi necessario specificare se fortemente o debolmente limitato.

Proposizione 7.21. $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ spazio di misura σ–finito, sia $E \subset \mathbf{L^p}(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ con $p \in]1, +\infty[$. Allora

$$E \text{ relativamente debolmente compatto} \iff E \text{ limitato.}$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 5.23, dal Corollario 9.13 e dalla Proposizione 9.4 . □

Il seguente risultato viene spesso indicato come *"Teorema di Dunford – Pettis"*.

Proposizione 7.22. $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ spazio di misura σ–finito, $E \subset \mathbf{L^1}(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Allora

$$E \text{ relativamente debolmente compatto}$$
$$\iff$$

1. E limitato,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \forall A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) < \delta$ e $\forall f \in E$ vale $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$,
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) < +\infty \colon \forall f \in E\ \int_{\Omega \setminus A} |f|\, d\mu < \varepsilon$.

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1, 5]. □

Nella Proposizione 7.22, se $\mu(\Omega) < +\infty$, il punto 3. è conseguenza del precedente.

7.1 Successioni e Topologia Debole

Nel seguito, la convergenza di una successione $x \colon \mathbb{N} \mapsto X$ ad un $x_\infty \in X$ rispetto alla topologia debole verrà indicata con "$x_n \rightharpoonup x_\infty$ per $n \to +\infty$" oppure con "$w - \lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty$".

Proposizione 7.23. X spazio vettoriale normato. $x \colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X e $x_\infty \in X$. Allora

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \iff \forall\, x' \in X' \text{ vale } \lim_{n\to+\infty} x'(x_n) = x'(x_\infty)\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

Proposizione 7.24. X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X e $x_\infty \in X$. Allora

$$x_n \to x_\infty \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x_\infty\,.$$

Dimostrazione. Se $x' \in X'$, allora $\left|x'(x_n - x_\infty)\right| \leq \left\|x'\right\|_{X'} \cdot \|x_n - x_\infty\|_X$, da cui la tesi. □

La Proposizione 7.24 è anche conseguenza diretta della Proposizione 7.3.

Nonostante la topologia debole sia diversa dalla topologia forte in ogni spazio di dimensione infinita, le nozioni di convergenza di successioni nelle due topologie possono coincidere.

Proposizione 7.25. In ℓ^1 con $\|\cdot\|_{\ell^1}$, data $x\colon \mathbb{N} \mapsto \ell^1$ e $x_\infty \in \ell^1$, si ha

$$x_n \to x_\infty \Longleftrightarrow x_n \rightharpoonup x_\infty\,.$$

Dimostrazione. Omessa. □

Proposizione 7.26. X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X, $x'\colon \mathbb{N} \mapsto X'$ successione in X', $x_\infty \in X$ e $x'_\infty \in X'$. Allora

$$\left.\begin{array}{ll} x_n \rightharpoonup x_\infty & \text{in } X \\ x'_n \to x'_\infty & \text{in } X' \end{array}\right\} \Longrightarrow x'_n(x_n) \to x'_\infty(x_\infty) \text{ in } \mathbb{K}\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{array}{rcl} \left|x'_n(x_n) - x'_\infty(x_\infty)\right| & \leq & \left|x'_n(x_n) - x'_\infty(x_n)\right| + \left|x'_\infty(x_n) - x'_\infty(x_\infty)\right| \\ & \leq & \left\|x'_n - x'_\infty\right\|_{X'} \cdot \|x_n\|_X + \left|x'_\infty(x_n - x_\infty)\right| \\ & \to & 0 \end{array}$$

dove è stata usata anche la Proposizione 7.20. □

Proposizione 7.27. X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X.

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ di Cauchy in } \tau_w \iff \forall\, x' \in X' \quad \exists \lim_{n\to+\infty} x'(x_n)\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

In alcuni testi, la condizione sopra descritta viene riassunta in *"la successione $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ è debolmente convergente"*, senza spcificare a quale (eventuale) limite.

Proposizione 7.28. X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X.

$$\begin{array}{rcl} \exists\, x_\infty \in X \text{ tale che } x_n \to x_\infty & \Rightarrow & \exists\, x_\infty \in X \text{ tale che } x_n \rightharpoonup x_\infty \\ & \Rightarrow & x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ debolmente di Cauchy.} \end{array}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Nessuna delle due implicazioni precedenti può essere invertita.

Esempio 7.29. L'esistenza del limite debole non implica la convergenza forte.

Dimostrazione. Sia $X = \ell^2$ e per ogni n sia x_n la successione con l'n–esimo elemento uguale a 1 e tutti gli altri elementi nulli. Allora $x_n \rightharpoonup 0$ ma la x_n non ammette limite forte, poiché $\|x_n\| = 1\ \forall n$. □

Esercizio 7.30. C'è relazione tra l'Esempio 7.29 e la Proposizione 7.17?

Esempio 7.31. La condizione di Cauchy in τ_w non implica l'esistenza del limite debole.

Dimostrazione. In c_c con $\|\cdot\|_{\ell^2}$, sia $x\colon \mathbb{N} \mapsto c_c$ la successione definita da

$$(x_n)_m = \begin{cases} 1/m & \text{per } m \leq n \\ 0 & \text{per } m > n\,. \end{cases}$$

Allora, x_n è debolmente di Cauchy ma non è debolmente convergente. Infatti, $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in ℓ^2, dove $x_m = 1/m$ è un elemento di ℓ^2 ma non di c_c. □

Proposizione 7.32. *X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X.*

$$x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ debolmente di Cauchy} \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ fortemente limitata.}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare alcuni precedenti risultati:

$$\begin{array}{ll} x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ di Cauchy in } \tau_w & \text{(Esercizio 1.38)} \\ \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ debolmente limitata} & \text{(Proposizione 7.20)} \\ \Longrightarrow x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ fortemente limitata} & \end{array}$$

□

Corollario 7.33. *X spazio vettoriale normato. $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ funzione convessa e fortemente semicontinua inferiormente rispetto a τ_s. $x_n\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione tale che $x_n \rightharpoonup x_\infty$, con $x_\infty \in X$. Allora*

$$f(x_\infty) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)\,.$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 7.18. □

Corollario 7.34. *X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione in X e $x_\infty \in X$.*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \Longrightarrow \|x_\infty\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|\,.$$

Dimostrazione. Segue dal Corollario 7.33 (oppure dal Corollario 7.19). □

Proposizione 7.35. *X spazio vettoriale normato. $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ successione, $x_\infty \in X$.*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \Longrightarrow x_\infty \in \overline{\mathrm{co}\,\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}}$$

(la chiusura è relativa alla topologia forte).

Dimostrazione. Conseguenza della Proposizione 7.16. □

Proposizione 7.36. X spazio vettoriale normato. Siano inoltre $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ una successione in X, $x_\infty \in X$ e $B' \subseteq X'$ tale che $\operatorname{span} B'$ è (fortemente) denso in X'.

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \iff \begin{cases} x\colon \mathbb{N} \mapsto X \text{ fortemente limitata,} \\ \forall\, x' \in B' \quad \lim_{n\to+\infty} x'(x_n) = x'(x_\infty)\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è immediata.

Implicazione $\Leftarrow$. Sia $L = \sup_n \|x_n\|$, quindi $\|x_\infty\| \leq L$. Sia $x' \in \operatorname{span} B'$. Allora certamente $\lim_{n\to+\infty} x'(x_n) = x'(x_\infty)$ per noti teoremi sui limiti. Sia ora $x' \in X'$ arbitrario. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x'_\varepsilon \in \operatorname{span} B'$ tale che $\left\|x' - x'_\varepsilon\right\| < \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} \left|x'(x_n) - x'(x_\infty)\right| &\leq \left|x'(x_n) - x'_\varepsilon(x_n)\right| + \left|x'_\varepsilon(x_n) - x'_\varepsilon(x_\infty)\right| \\ &\quad + \left|x'_\varepsilon(x_\infty) - x'(x_\infty)\right| \\ &\leq \left\|x' - x'_\varepsilon\right\| \cdot \|x_n\| + \left|x'_\varepsilon(x_n) - x'_\varepsilon(x_\infty)\right| \\ &\quad + \left\|x' - x'_\varepsilon\right\| \cdot \|x_\infty\| \\ &\leq 2\varepsilon L + \left|x'_\varepsilon(x_n) - x'_\varepsilon(x_\infty)\right| \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Corollario 7.37. In ℓ^2 una successione $x\colon \mathbb{N} \mapsto \ell^2$ è debolmente convergente a x_∞ se e solo se è limitata e converge componente per componente.

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 7.36 con B' base di ℓ^2. □

Corollario 7.38. In $\mathbf{C^0}\big([0,1]\big)$ con la norma del sup, una successione è debolmente convergente ad una funzione continua se e solo se è limitata e converge puntualmente.

Dimostrazione. Omessa. □

Corollario 7.39. Sia $p \in [1, +\infty[$. In $\mathbf{L^p}(\mathbb{R})$, una successione $x\colon \mathbb{N} \mapsto X$ è debolmente convergente a x_∞ se e solo se è fortemente limitata e per ogni intervallo limitato I vale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I x_n = \int_I x_\infty\,.$$

Dimostrazione. Immediata. □

8 Spazi Riflessivi

Proposizione 8.1. X spazio vettoriale normato. Allora esiste un'immersione canonica, lineare, isometrica e iniettiva $J\colon X \mapsto X''$.

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{rcccl} J & : & X & \mapsto & X'' \\ & & x & \mapsto & Jx \end{array} \qquad \text{dove} \qquad \begin{array}{rcccl} Jx & : & X' & \mapsto & \mathbb{K} \\ & & x' & \mapsto & x'(x)\,. \end{array}$$

La linearità di J è immediata. Inoltre

$$\left|(Jx)(x')\right| = \left|x'(x)\right| \leq \left\|x'\right\|_{X'} \cdot \|x\|_X$$

quindi

$$\|Jx\|_{X''} \leq \|x\|_X \,, \tag{8.5}$$

il che mostra la limitatezza e, quindi, la continuità di Jx.

Inoltre, sia $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$. Per il Corollario 6.15 al Teorema di Hahn – Banach, esiste un $x' \in X'$ tale che $\left\|x'\right\|_{X'} = 1$ e $x'(x) = \|x\|_X = 1$. Per questi x e x' vale che $(Jx)(x') = \left\|x'\right\|_{X'} \cdot \|x\|_X = 1$. Assieme alla (8.5), ciò mostra che J è un'isometria (di conseguenza, J è anche iniettiva). □

L'applicazione J sopra definita viene spesso chiamata *"mappa di James"*. Naturalmente, $\|J\| = 1$.

Definizione 8.2. X SPAZIO VETTORIALE NORMATO.

$$X \text{ È RIFLESSIVO } \rightleftharpoons J \text{ È SURIETTIVA.}$$

Corollario 8.3. X spazio vettoriale normato.

$$X \text{ riflessivo } \iff J \text{ è un isomorfismo.}$$

Dimostrazione. Conseguenza della Proposizione 8.1. □

Esistono spazi normati (detti *"spazi di James"*) in cui X e X'' sono isomorfi, ma X non è riflessivo poiché l'isomorfismo non è realizzato dalla J, cfr. [8].

Proposizione 8.4. X spazio vettoriale normato.

$$X \text{ riflessivo } \Longrightarrow X \text{ di Banach.}$$

Dimostrazione. Applicare la Proposizione 5.18 ed il Corollario 8.3. □

Esempio 8.5. ℓ^1 con la $\|\cdot\|_{\ell^1}$ è uno spazio di Banach non riflessivo.

Proposizione 8.6. X spazio di Hilbert. Allora X è riflessivo.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 5.22. Oppure dalle proposizioni 4.11 e 8.13. □

Proposizione 8.7. X spazio vettoriale normato.

$$X \text{ riflessivo } \Longrightarrow X' \text{ riflessivo.}$$

Dimostrazione. Sia $J' \colon X' \mapsto X'''$ la mappa di James. Bisogna mostrare che è suriettiva. Sia $x_o''' \in X'''$, allora per ogni $x'' \in X''$ vale $x_o'''(x'') = x_o'''(Jx)$ per un opportuno $x \in X$. Sia $\varphi \colon X \mapsto \mathbb{K}$ data da $\varphi(x) = x_o'''(Jx)$. φ è lineare ed è continua poiché $\left|\varphi(x)\right| \leq \left\|x_o'''\right\|_{X'''} \cdot \|x\|_X$. Quindi $\varphi \in X'$. Inoltre, $J(\varphi) = x_o'''$, da cui la tesi. □

In generale, il viceversa della Proposizione 8.7 è falso.

Proposizione 8.8. Sia $X = \mathbf{C^0}\left([0,1]\right)$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{L^p}}$, $p \in]1, +\infty[$. Allora

(1) $X' = \mathbf{L^q}$, con $1/p + 1/q = 1$;

(2) X' è riflessivo ma X non lo è.

Dimostrazione. X è denso in $\mathbf{L^p}\left([0,1]\right)$ rispetto alla $\| \quad \|_{\mathbf{L^p}}$. Quindi $X' = (\mathbf{L^p})' = \mathbf{L^q}$, cfr. proposizioni 5.19 e 5.23. Ciò dimostra (i). Passando a (ii), è noto che $(\mathbf{L^q})' = \mathbf{L^p}$, quindi $X'' \neq X$. □

Proposizione 8.9. X spazio vettoriale normato.

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ di Banach} \\ X' \text{ riflessivo} \end{array}\right\} \Longrightarrow X \text{ riflessivo.}$$

Dimostrazione. Sia $X''_o = JX$. J è lineare, quindi X''_o è un sottospazio di X''. J è un'isometria, quindi X''_o è completo. Ne segue che X''_o è un convesso chiuso in X''. Se esiste un $x''_* \in X'' \setminus X''_o$, allora per il Corollario 6.13 al Teorema di Hahn – Banach, esiste un $x'''_* \in X'''$ tale che $x'''_*(x''_*) = 1$ e $x'''_*(X''_o) = \{0\}$. Sia $x'_* = J^{-1}(x'''_*)$. Allora, per ogni $x \in X$

$$x'_*(x) = (Jx)(x'_*) = x'''_*(Jx) = 0$$

in contraddizione con la scelta di x'''_*. □

Corollario 8.10. X spazio di Banach.

$$X \text{ riflessivo} \iff X' \text{ riflessivo.}$$

Dimostrazione. Applicare le proposizioni 8.7 e 8.9. □

Corollario 8.11. X spazio vettoriale normato.

$$X' \text{ riflessivo} \iff \text{il completamento di } X \text{ è riflessivo.}$$

Dimostrazione. Immediata. □

Il risultato seguente è spesso indicato come *"Teorema di Kakutani"*.

Proposizione 8.12. X spazio di Banach.

$$X \text{ riflessivo} \iff \left\{x \in X \colon \|x\| \leq 1\right\} \text{ debolmente compatto.}$$

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1]. □

Il seguente risultato viene spesso indicato come *"Teorema di Milman"*.

Proposizione 8.13. X spazio di Banach uniformemente convesso $\Rightarrow X$ riflessivo.

Dimostrazione. Omessa, cfr. [1]. □

Proposizione 8.14. X spazio di Banach.

$$X' \text{ separabile} \implies X \text{ separabile.}$$

Dimostrazione. Sia $\{x'_1, x'_2, \ldots\}$ un insieme numerabile e denso in X'. Per la Definizione 5.7, per ogni n esiste un $x_n \in X$ tale che $\|x\|_X = 1$ e $x'_n(x_n) \geq (1/2)\|x'_n\|_{X'}$. Sia S l'insieme delle combinazioni lineari finite degli x_n con coefficienti in $\mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) o in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Sia $V = \bar{S}$. Sia $x' \in X'$ tale che $x'(V) = \{0\}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\left\|x' - x'_{n_\varepsilon}\right\|_{X'} < \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned}
\|x'\|_{X'} &\leq \left\|x' - x'_{n_\varepsilon}\right\|_{X'} + \left\|x'_{n_\varepsilon}\right\|_{X'} \\
&\leq \varepsilon + 2x'_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) \\
&\leq \varepsilon + 2(x'_{n_\varepsilon} - x')(x_{n_\varepsilon}) \\
&\leq \varepsilon + 2\left\|x'_{n_\varepsilon} - x'\right\|_{X'} \\
&\leq 3\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Da cui $x' = 0$ e la tesi per il Corollario 6.13. □

Esercizio 8.15. Il viceversa della Proposizione 8.14 è falso. (Cfr. $\mathbf{L^1}$).

Corollario 8.16. X spazio di Banach.

$$X \text{ riflessivo e separabile} \iff X' \text{ riflessivo e separabile.}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è la Proposizione 8.14.

Implicazione $\Rightarrow$: $J(X)$ è riflessivo e separabile per la Proposizione 8.1, quindi lo è anche X' per la Proposizione 8.14. □

9 Topologia Debole∗

Proposizione 9.1. X uno spazio vettoriale normato. X' duale di X. Allora l'insieme $\{p_x : x \in X\}$ dove

$$p_x(x') = \left|x'(x)\right|$$

è una famiglia separante di seminorme su X'.

Dimostrazione. Immediata. □

Definizione 9.2. La topologia di spazio vettoriale seminormato indotta da X su X' si chiama topologia debole∗.

Nel seguito, questa topologia sarà indicata con τ'_{w*}.

Proposizione 9.3. X spazio vettoriale normato. Allora, in X'

$$\tau'_{w*} \subseteq \tau'_w \subseteq \tau'_s\,.$$

Dimostrazione. In generale, la famiglia di seminorme che definisce τ'_{w*} è più piccola della famiglia di seminorme che definisce τ'_w, da cui la prima inclusione. La seconda inclusione segue dalla Proposizione 7.3. □

Proposizione 9.4. X spazio vettoriale normato riflessivo. Allora $\tau'_{w*} = \tau'_w$.

Dimostrazione. Immediata. □

Esercizio 9.5. Gli enunciati relativi alla topologia debole possono essere riformulati relativamente alla topologia debole∗. Determinarli, enunciarli e dimostrarli.

Il seguente risultato è spesso indicato come *"Secondo Principio di Limitatezza Uniforme"*.

Proposizione 9.6. X spazio di Banach. $E' \subseteq X'$.

$$E' \text{ fortemente limitato } \iff E' \text{ debolmente}* \text{ limitato.}$$

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione della Proposizione 7.20. □

Esercizio 9.7. Perché è necessario chiedere X di Banach?

Esempio 9.8. L'ipotesi *"X completo"* nella Proposizione 9.6 è necessaria.

Dimostrazione. $X = c_c$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Allora $(c_c)' = \ell^\infty$. Sia $x'_n : X \mapsto \mathbb{R}$ il funzionale che ad ogni $x \in X$, $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, associa la somma dei primi n elementi: $x'_n(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Sia $E'_n = \{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$. E'_n è debolmente∗ limitato poichè $\left|x'_n(x)\right|$ é controllato dalla somma dei moduli dei coefficienti di x. E' non è fortemente limitato poiché $\left\|x'_n\right\|_{X'} = n$. □

Naturalmente, la completezza di X è necessaria solo in una delle due implicazioni che costituiscono la Proposizione 9.6.

Il risultato seguente è spesso chiamato *"Teorema di Banach – Alaoglu"*.

Proposizione 9.9. X spazio vettoriale normato. $E' \subseteq X'$.

$$\left.\begin{array}{l} E' \text{ fortemente limitato} \\ E' \text{ debolmente}* \text{ chiuso} \end{array}\right\} \Longrightarrow E' \text{ debolmente}* \text{ compatto.}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che la sfera unitaria fortemente chiusa $\mathcal{B}' = \overline{B(0,1)}$ di X' è debolmente∗ compatta.

Sia $Y = \mathbb{K}^X = \prod_{x \in X} \mathbb{K}$ munito della topologia prodotto. X' si immerge in modo naturale in Y attraverso $j : X' \mapsto Y$ data da $j(x') = \big(x'(x)\big)_{x \in X}$.

Gli intorni fondamentali in Y sono prodotti cartesiani finiti di intorni fondamentali in $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{U}_{y_o} = \prod_{i=1}^n \left\{ y \in Y : \left|y(x_i) - y_o(x_i)\right| < \varepsilon_i \right\} .$$

Questa topologia, ristretta ad X', coincide con la topologia debole∗.

$\mathcal{B}'$ è chiusa in Y. Infatti $\mathcal{B}'$ è l'insieme delle funzioni $X \mapsto \mathbb{K}$ lineari e con norma limitata da 1, il che equivale a dire che (a meno dell'inclusione j)

$$\mathcal{B}' = \left[\bigcap_{x_1, x_2 \in X} A_{x_1, x_2} \right] \cap \left[\bigcap_{x \in X, \lambda \in \mathbb{K}} B_{x, \lambda} \right] \cap C$$

dove

$$
\begin{aligned}
A_{x_1,x_2} &= \big\{y \in Y \colon y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)\big\} &(9.6)\\
B_{x,\lambda} &= \big\{y \in Y \colon y(\lambda x) = \lambda \cdot y(x)\big\} &(9.7)\\
C &= \Big\{y \in Y \colon \big|y(x)\big| \leq \|x\|\Big\}\\
&= \prod_{x \in X} \big[-\|x\|_X, \|x\|_X\big] \ .
\end{aligned}
$$

Fissati x_1 e x_2, A_{x_1,x_2} è chiuso in Y, cfr. Esercizio 9.10. Analogamente, fissati $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $B_{x,\lambda}$ è chiuso in Y, cfr. Esercizio 9.10. Infine, ogni C_x è compatto perché prodotto cartesiano di compatti (Teorema di Tychonov, cfr. Proposizione 10.4).

Quindi, $\mathcal{B}'$ è un'intersezione di chiusi e di compatti. Da cui la tesi. □

Esercizio 9.10. Dimostrare che gli insiemi definiti in (9.6) ed in (9.7) sono chiusi.

Suggerimento: fissato $x \in X$ la proiezione $\varphi_x \colon Y \mapsto \mathbb{K}$ data da $\varphi_x(y) = y(x)$ è continua. Quindi A_{x_1,x_2} è la controimmagine di $\{0\}$ tramite $\varphi_{x_1+x_2} - \varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}$ ...

Esempio 9.11. In generale, la Proposizione 9.9 non può essere invertita.

Dimostrazione. Sia $X = c_c$. Sia E' costituito da 0 e dalla successione degli x'_n definiti da $x'_n(x) = 2^n \xi_n$, se $x = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$. Dato che $\big\|x'_n\big\|_{X'} = 2^n$, E' non è fortemente limitato.

E' è debolmente$*$ compatto. Infatti, sia $\{A'_i \colon i \in I\}$ un ricoprimento aperto di E'. Esiste allora un i_* tale che $0 \in A'_{i_*}$. A'_{i_*} è un aperto contenente 0, quindi contiene un intorno fondamentale $\mathcal{U}'$ dello 0. Sia $\mathcal{U}' = \bigcap_{j=1}^m \{x' \in X' \colon \big|x'(\bar{x}_j)\big| < r_j\}$. $\mathcal{U}'$ contiene definitivamente la successione x'_n (dall'N–esimo in poi, se tutti gli $\bar{x}_j$ hanno tutte le componenti oltre la N-esima nulle). Ne segue che da $\{A'_i \colon i \in I\}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito. □

Proposizione 9.12. X spazio di Banach. $E' \subseteq X'$.

$$
\left.\begin{array}{l} E' \text{ fortemente limitato}\\ E' \text{ debolmente}* \text{ chiuso}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow E' \text{ debolmente}* \text{ compatto.}
$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è la Proposizione 9.9. L'altra implicazione segue dalla Proposizione 9.6. □

Il risultato seguente mostra che la proprietà di Heine–Borel vale nel duale di ogni spazio di Banach, relativamente alla topologia debole$*$.

Corollario 9.13. X spazio di Banach. $E' \subseteq X'$.

$$
\left.\begin{array}{l} E' \text{ debolmente}* \text{ limitato}\\ E' \text{ debolmente}* \text{ chiuso}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow E' \text{ debolmente}* \text{ compatto.}
$$

Dimostrazione. Segue dalle proposizioni 9.6, 9.9 e 9.12. □

10 Appendice

10.1 Sistemi Fondamentali di Intorni

Definizione 10.1. X INSIEME E $x \in X$. SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI DI x È UNA COLLEZIONE $\mathcal{S}_x$ DI SOTTOINSIEMI DI X CON LE PROPRIETÀ:

(I) $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{S}_x,\ x \in \mathcal{U}$;

(II) $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{S}_x,\ \forall \xi \in \mathcal{U},\ \exists \mathcal{V} \in \mathcal{S}_\xi$ TALE CHE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$;

(III) $\forall \mathcal{U}', \mathcal{U}'' \in \mathcal{S}_x,\ \exists \mathcal{U} \in \mathcal{S}_x$ TALE CHE $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}''$.

Proposizione 10.2. X insieme tale che per ogni $x \in X$, esista un sistema fondamentale di intorni di x. Allora X è uno spazio topologico in cui gli aperti sono così definiti:

$$A \text{ è aperto } \rightleftharpoons \forall x \in A \quad \exists \mathcal{U} \in \mathcal{S}_x \text{ tale che } \mathcal{U} \subseteq A\,.$$

Proposizione 10.3. (X, τ) spazio topologico. Fissato $x \in X$, sia $\mathcal{S}_x$ una famiglia di insiemi tale che

1. per ogni $x \in X$ e per ogni $\mathcal{U} \in \mathcal{S}_x$, $x \in \mathcal{U}$;
2. per ogni intorno $\mathcal{V}$ di x esiste un elemento $\mathcal{U} \in \mathcal{S}_x$ tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Allora $\mathcal{S}_x$ è un sistema fondamentale di intorni di x che induce su X la stessa topologia τ.

10.2 Teorema di Tychonov

Teorema 10.4. Sia I un insieme di indici. Per ogni $i \in I$, X_i è uno spazio topologico compatto. Allora lo spazio topologico prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è uno spazio topologico compatto relativamente alla topologia prodotto.

10.3 Spazi Metrici

Definizione 10.5. SI DICE SPAZIO METRICO UN INSIEME X IN CUI SIA DEFINITA UNA DISTANZA, VALE A DIRE UNA FUNZIONE $d\colon X \times X \mapsto \mathbb{R}$ CON LE PROPRIETÀ:

1. $\forall x, y \in X\ d(x,y) \geq 0$.
2. $\forall x, y \in X\ d(x,y) = 0 \iff x = y$.
3. $\forall x, y \in X\ d(x,y) = d(y,x)$.
4. $\forall x, y, z \in X\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

La proprietà 3. viene spesso chiamata *"simmetria"*. La 4. è la *"disuguaglianza triangolare"*. Alcuni testi usano la parola *"metrica"* al posto di *"distanza"*.

Definizione 10.6. X SPAZIO VETTORIALE E SPAZIO METRICO CON LA DISTANZA d.

$$\begin{array}{ccl} d \text{ INVARIANTE PER TRASLAZIONI} & \rightleftharpoons & \forall x_1, x_2, v \in X \quad d(x_1+v, x_2+v) = d(x_1, x_2) \\ d \text{ OMOGENEA} & \rightleftharpoons & \forall x_1, x_2 \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ d(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda| \, d(x_1, x_2) \,. \end{array}$$

10.4 Teorema di Baire

Teorema 10.7. X spazio metrico completo. $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ famiglia numerabile di chiusi in X.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \overset{\circ}{C_n} = \emptyset \Longleftrightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \text{ ha parte interna vuota.}$$

Corollario 10.8. X spazio metrico completo. $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ famiglia numerabile di chiusi in X.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = X \Longrightarrow \exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \overset{\circ}{C_{\bar{n}}} \neq \emptyset \,.$$

10.5 Il Lemma di Zorn

Definizione 10.9. UN INSIEME È PARZIALMENTE ORDINATO SE VI È DEFINITA UNA RELAZIONE RIFLESSIVA, ANTISIMMETRICA E TRANSITIVA.

UN INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO È INDUTTIVO SE OGNI SUO SOTTOINSIEME TOTALMENTE ORDINATO AMMETTE MAGGIORANTE.

S INSIEME TOTALMENTE ORDINATO. MAGGIORANTE DI UN SOTTOINSIEME A, $A \subseteq S$, È UN ELEMENTO $m \in S$ TALE CHE $\forall s \in A$ VALE $m \geq s$.

S INSIEME TOTALMENTE ORDINATO. ELEMENTO MASSIMALE DI UN SOTTOINSIEME A, $A \subseteq S$, È UN ELEMENTO $m \in S$ TALE CHE SE $x \in A$ E $x \geq m$, ALLORA $x = m$.

Proposizione 10.10. Un insieme non vuoto parzialmente ordinato induttivo ammette elemento massimale.

11 Simboli

$\rightleftharpoons$ Per definizione.

$\Leftrightarrow$ Se e solo se, è equivalente a.

$\Rightarrow$ Implica.

$\supset$, $\subset$ Inclusione *stretta*, analogamente a $>$, $<$.

$\supseteq$, $\subseteq$ Inclusione *debole*, analogamente a $\geq$, $\leq$.

A^B (con A e B insiemi). Insieme delle funzioni $f\colon B \mapsto A$.

$[a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq a \text{ e } x \leq b\}$.

$]a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R}\colon x > a \text{ e } x \leq b\}$.

$[a, b[$ $= \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq a \text{ e } x < b\}$.

$]a, b[$ $= \{x \in \mathbb{R}\colon x > a \text{ e } x < b\}$.

(a, b) punto del piano $\mathbb{R}^2$ di coordinate a e b.

c Insieme delle successioni convergenti con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$.

c_c Insieme delle successioni definitivamente nulle con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$.

c_o Insieme delle successioni convergenti a 0 con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi. Può essere definito come $\mathbb{R}^2$ con l'usuale somma e con il prodotto $(a', b') \cdot (a'', b'') = (a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b')$.

$\mathbf{C^0}(\Omega)$ Insieme delle funzioni continue definite su Ω ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$.

$\mathbf{C^k}(\Omega)$ Insieme delle funzioni con derivata k-esima continua su Ω ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$.

$\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ Insieme delle funzioni con derivata di qualunque ordine su Ω con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$. Formalmente, $\mathbf{C}^\infty = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{C^k}$.

χ_A funzione caratteristica dell'insieme A. Vale 1 se $x \in A$ e 0 se $x \notin A$.

$\mathbb{K}$ campo di scalari, o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$\mathbf{L^p}(\Omega, \mu)$ Insieme delle funzioni f misurabili con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$ tali che $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty$, per $p \in [1, +\infty[$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

ℓ^p Insieme delle successioni tali che $\sum_0^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$ con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$, per $p \in [1, +\infty[$.

$\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mu)$ Insieme delle funzioni f misurabili con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$ tali che $\inf \left\{ c \in \mathbb{R}\colon \mu\left(f^{-1}\left(]c, +\infty[\right)\right) = 0 \right\} < +\infty$, ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$).

ℓ^∞ Insieme delle successioni limitate con valori, se non altrimenti specificato, in $\mathbb{R}$.

$\mathcal{L}(X, Y)$ insieme delle applicazioni lineari continue definite su X con valori in Y.

$\mathbb{N}$ $= \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali. Può essere definito come l'insieme delle classi di equivalenza di coppie $(n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ con $d \neq 0$ rispetto alla relazione di equivalenza $(n', d') \sim (n'', d'') \rightleftharpoons n'd'' = n''d'$.

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali. Può essere definito come l'insieme delle classi di equivalenza di successioni di elementi di $\mathbb{Q}$ che soddisfano alla condizione di Cauchy, dove la relazione di equivalenza è definita da $\{q'_n\} \sim \{q''_n\} \rightleftharpoons q'_n - q''_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

$\mathbb{Z}$ $= \{0, -1, +1, -2, +2, -3, +3, -4, +4, \ldots\}$.

Indice analitico

Bibliografia

[1] H. Brezis. *Analisi Funzionale.* Liguori Editore, 1986.

[2] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini. *Lezioni di Topologia Generale.* Feltrinelli, Milano, 1977.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. *Vector measures.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[4] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Parts I, II and III.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.

[5] R. E. Edwards. *Functional analysis.* Dover Publications Inc., New York, 1995. Theory and applications, Corrected reprint of the 1965 original.

[6] G. B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999.

[7] G. Gilardi. *Analisi Tre.* McGraw–Hill, 1994.

[8] R. C. James. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 37:174–177, 1951.

[9] L. V. Kantorovic and G. P. Akilov. *Analisi funzionale.* Editori Riuniti, 1980.

[10] A. Kolmogorov and S. Fomin. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Mir, Mosca, 1980.

[11] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[12] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[13] W. Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[14] K. Yosida. *Functional analysis.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.