

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2002/2003 – Terzo Scritto

Matricola:

--	--	--	--	--	--

Cognome: Nome:

Domanda: 1 2 3 4 5 6 7 8

Risposta:

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. Siano $Q_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y \leq 4\}$ e $f: Q_\alpha \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = 3 + x^2$. È allora necessariamente vero che:

1.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \max f = 3 + (\alpha + 2)^2$ e $\min f = 3 + (\alpha - 2)^2$ **1.B**

1.C $\alpha < -2 \Rightarrow \max f = 3 + (\alpha - 2)^2$ e $\min f = 3$ $\alpha \in [-2, 2] \Rightarrow \min f = 3$ **1.D**

2. L'equazione $x^{51} + \sinh(x^2 + y - y^2) + \ln(x^2 + y^3 + e) = 1$ definisce una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$. Per la funzione φ , $x = 0$ è

2.A un punto di flesso orizzontale un punto di massimo locale **2.B**

2.C un punto di minimo locale Nessuna delle altre affermazioni è esatta **2.D**

3. Sia $D_{r,R}$ la porzione di corona circolare centrata nell'origine di raggi r e R (con $r < R$) contenuta nel semipiano

$y \geq 0$. Allora $\lim_{(r,R) \rightarrow (0, \pi/7)} \iint_{D_{r,R}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy =$

3.A $+\infty$ $2\pi/7$ **3.B**

3.C $\pi/7$ Nessuna delle altre affermazioni è esatta **3.D**

4. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - y = \begin{cases} 1-x & \text{per } x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x > 1 \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione

4.A $y(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per } x \leq 1 \\ (1 + 1/e)e^x & \text{per } x > 1 \end{cases}$ $y(x) = \begin{cases} 2 - x - e^{-x} & \text{per } x \leq 1 \\ (e - 1)e^{-x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$ **4.B**

4.C $y(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per } x \leq 1 \\ (e - 1)e^{-x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$ Nessuna delle altre affermazioni è esatta **4.D**

5. Nel punto $(0, 1, 0)$, la funzione $f: \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z-1+\cosh(x+2y+1)}{x+2y-z^2} & \text{per } x+2y-z^2 \neq 0 \\ 0 & \text{per } x+2y-z^2 = 0 \end{cases}$

5.A è continua ma non derivabile Nessuna delle altre affermazioni è esatta **5.B**

5.C non è continua è differenziabile **5.D**

6. Sia $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathbf{R})$. Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |f(x)| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- 6.A** $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ ammette un'unica soluzione locale Nessuna delle altre affermazioni è esatta **6.B**
6.C potrebbe ammettere più soluzioni ammette un'unica soluzione locale se e solo se $f(x_0) \neq 0$ **6.D**

7. Data $\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-k-1, -k[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, sia $f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{x^2} \chi_k(x)$. Tra le seguenti affermazioni:

- (1) la successione f_n è uniformemente convergente su \mathbf{R} ;
- (2) la successione f_n converge uniformemente su $[-5e, 5e]$ ad una funzione di classe \mathbf{C}^∞ ;
- (3) il limite puntuale della successione f_n è discontinuo o non definito in 0;
- (4) la successione f_n non converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

- 7.A** Sono vere la (3) e la (4) È vera solo la (2) **7.B**
7.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta Sono vere la (1) e la (2) **7.D**

8. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ una successione di elementi di X . Quale/i delle seguenti implicazioni è/sono VERA/E?

1. $\{x_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ limitata
2. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
3. $\{x_n\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
4. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ convergente

- 8.A** Solo la 2. e la 3. Solo la 1. **8.B**
8.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta Solo la 2. e la 4. **8.D**

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2002/2003 – Terzo Scritto

Matricola:

--	--	--	--	--	--

Cognome: Nome:

Domanda:	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta:	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>	<input style="width: 30px; height: 30px;" type="checkbox"/>

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ una successione di elementi di X . Quale/i delle seguenti implicazioni è/sono VERA/E?

1. $\{x_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ limitata
2. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
3. $\{x_n\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
4. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ convergente

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1.A Solo la 2. e la 3. | Solo la 1. 1.B |
| 1.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta | Solo la 2. e la 4. 1.D |

2. L'equazione $x^{33} + \sinh(x^2 + y - y^2) + \ln(x^2 + y^3 + e) = 1$ definisce una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$. Per la funzione φ , $x = 0$ è

- | | |
|------------------------------------|--|
| 2.A un punto di flesso orizzontale | un punto di minimo locale 2.B |
| 2.C un punto di massimo locale | Nessuna delle altre affermazioni è esatta 2.D |

3. Nel punto $(1, 0, 0)$, la funzione $f: \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - \cosh(x+3y-z)}{2x-y+z^2} & \text{per } 2x-y+z^2 \neq 0 \\ 0 & \text{per } 2x-y+z^2 = 0 \end{cases}$

- | | |
|----------------------------------|--|
| 3.A è differenziabile | Nessuna delle altre affermazioni è esatta 3.B |
| 3.C è continua ma non derivabile | non è continua 3.D |

4. Sia $D_{r,R}$ la porzione di corona circolare centrata nell'origine di raggi r e R (con $r < R$) contenuta nel semipiano

$y \geq 0$. Allora $\lim_{(r,R) \rightarrow (0,\pi/5)} \iint_{D_{r,R}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy =$

- | | |
|--------------|--|
| 4.A $2\pi/5$ | Nessuna delle altre affermazioni è esatta 4.B |
| 4.C $\pi/5$ | $+\infty$ 4.D |

5. Siano $Q_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y \leq 4\}$ e $f: Q_\alpha \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = 7 + x^2$. È allora necessariamente vero che:

- | | |
|--|---|
| 5.A $\alpha < -2 \Rightarrow \max f = 7 + (\alpha - 2)^2$ e $\min f = 7$ | $\alpha \in [-2, 2] \Rightarrow \min f = 7$ 5.B |
| 5.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta | $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \max f = 7 + (\alpha + 2)^2$ e $\min f = 7 + (\alpha - 2)^2$ 5.D |

6. Data $\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-k-1, -k[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, sia $f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{x^2} \chi_k(x)$. Tra le seguenti affermazioni:

- (1) la successione f_n è uniformemente convergente su \mathbf{R} ;
 (2) la successione f_n converge uniformemente su $[-4e, 4e]$ ad una funzione di classe \mathbf{C}^∞ ;
 (3) il limite puntuale della successione f_n è discontinuo o non definito in 0;
 (4) la successione f_n non converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

6.A Sono vere la (1) e la (2)

Sone vere la (3) e la (4) **6.B**

6.C È vera solo la (2)

Nessuna delle altre affermazioni è esatta **6.D**

7. Sia $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathbf{C}^1(\mathbf{R})$. Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |f(x)| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

7.A potrebbe ammettere più soluzioni

Nessuna delle altre affermazioni è esatta **7.B**

7.C $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ ammette un'unica soluzione locale ammette un'unica soluzione locale se e solo se $f(x_0) \neq 0$ **7.D**

8. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + y = \begin{cases} 2-x & \text{per } x \leq 2 \\ 0 & \text{per } x > 2 \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione

8.A $y(x) = \begin{cases} 3 - 2e^{-x} - x & \text{per } x \leq 2 \\ (e^2 - 2)e^{-x} & \text{per } x > 2 \end{cases}$

Nessuna delle altre affermazioni è esatta **8.B**

8.C $y(x) = \begin{cases} 3 - 2e^{-x} - x & \text{per } x \leq 2 \\ (2 + 2/e)e^x & \text{per } x > 2 \end{cases}$

$y(x) = \begin{cases} 2e^x - 1 + x & \text{per } x \leq 2 \\ (2 + 2/e)e^x & \text{per } x > 2 \end{cases}$ **8.D**

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2002/2003 – Terzo Scritto

Matricola:

--	--	--	--	--	--

Cognome: Nome:

Domanda: 1 2 3 4 5 6 7 8

Risposta:

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ una successione di elementi di X . Quale/i delle seguenti implicazioni è/sono VERA/E?

1. $\{x_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ limitata
2. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
3. $\{x_n\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
4. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ convergente

- 1.A Nessuna delle altre affermazioni è esatta
 1.C Solo la 2. e la 3.

- Solo la 1. 1.B
 Solo la 2. e la 4. 1.D

2. Sia $D_{r,R}$ la porzione di corona circolare centrata nell'origine di raggi r e R (con $r < R$) contenuta nel semipiano $y \geq 0$. Allora $\lim_{(r,R) \rightarrow (0, \pi/9)} \iint_{D_{r,R}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy =$

- 2.A $\pi/9$
 2.C $2\pi/9$

- Nessuna delle altre affermazioni è esatta 2.B
 $+\infty$ 2.D

3. L'equazione $x^{77} + \sinh(x^2 + y - y^2) + \ln(x^2 + y^3 + e) = 1$ definisce una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$. Per la funzione φ , $x = 0$ è

- 3.A un punto di flesso orizzontale
 3.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta

- un punto di minimo locale 3.B
 un punto di massimo locale 3.D

4. Siano $Q_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y \leq 4\}$ e $f: Q_\alpha \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = 1 + x^2$. È allora necessariamente vero che:

- 4.A $\alpha \in [-2, 2] \Rightarrow \min f = 1$
 4.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta

- $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \max f = 1 + (\alpha + 2)^2$ e $\min f = 1 + (\alpha - 2)^2$ 4.B
 $\alpha < -2 \Rightarrow \max f = 1 + (\alpha - 2)^2$ e $\min f = 1$ 4.D

5. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + y = \begin{cases} 1-x & \text{per } x \leq 1 \\ 0 & \text{per } x > 1 \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione

- 5.A $y(x) = \begin{cases} 2-x-e^{-x} & \text{per } x \leq 1 \\ (e-1)e^{-x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$

- Nessuna delle altre affermazioni è esatta 5.B

5.C $y(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per } x \leq 1 \\ (e-1)e^{-x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$ $y(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{per } x \leq 1 \\ (1+1/e)e^x & \text{per } x > 1 \end{cases}$ 5.D

6. Sia $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathbf{C}^1(\mathbf{R})$. Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |f(x)| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ potrebbe ammettere più soluzioni 6.B
- 6.A $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ ammette un'unica soluzione locale Nessuna delle altre affermazioni è esatta 6.D
- 6.C ammette un'unica soluzione locale se e solo se $f(x_0) \neq 0$ Nessuna delle altre affermazioni è esatta 6.D

7. Nel punto $(0, 0, 1)$, la funzione $f: \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4y^2 + \sinh(2x-z)}{4x^2 + 2y - z} & \text{per } 4x^2 + 2y - z \neq 0 \\ 0 & \text{per } 4x^2 + 2y - z = 0 \end{cases}$ Nessuna delle altre affermazioni è esatta 7.B
- 7.A è continua ma non derivabile non è continua 7.D
- 7.C è differenziabile non è continua 7.D

8. Data $\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-k-1, -k[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, sia $f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{x^2} \chi_k(x)$. Tra le seguenti affermazioni:
- (1) la successione f_n è uniformemente convergente su \mathbf{R} ;
- (2) la successione f_n converge uniformemente su $[-3e, 3e]$ ad una funzione di classe \mathbf{C}^∞ ;
- (3) il limite puntuale della successione f_n è discontinuo o non definito in 0;
- (4) la successione f_n non converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

- 8.A Sono vere la (1) e la (2) Sono vere la (3) e la (4) 8.B
- 8.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta È vera solo la (2) 8.D

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2002/2003 – Terzo Scritto

Matricola:

--	--	--	--	--	--

Cognome: Nome:

Domanda: 1 2 3 4 5 6 7 8

Risposta:

Per ognuna delle 8 domande sono suggerite 4 risposte. Una sola è esatta. Per ogni risposta esatta, vengono assegnati 4 punti. Per ogni risposta sbagliata -1/2. Per ogni risposta non data -1/4.

1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ una successione di elementi di X . Quale/i delle seguenti implicazioni è/sono VERA/E?

1. $\{x_n\}$ di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ limitata
2. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
3. $\{x_n\}$ convergente $\Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy
4. $\{x_n\}$ limitata $\Rightarrow \{x_n\}$ convergente

- 1.A** Solo la 2. e la 3.
1.C Solo la 1.

- Nessuna delle altre affermazioni è esatta **1.B**
 Solo la 2. e la 4. **1.D**

2. Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - y = \begin{cases} 2 - x & \text{per } x \leq 2 \\ 0 & \text{per } x > 2 \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ha soluzione

2.A $y(x) = \begin{cases} 2e^x - 1 + x & \text{per } x \leq 2 \\ (2 + e^{-2})e^x & \text{per } x > 2 \end{cases}$

Nessuna delle altre affermazioni è esatta **2.B**

2.C $y(x) = \begin{cases} 3 - 2e^{-x} - x & \text{per } x \leq 2 \\ (2 + 2/e)e^x & \text{per } x > 2 \end{cases}$

$y(x) = \begin{cases} 3 - 2e^{-x} - x & \text{per } x \leq 2 \\ (e^2 - 2)e^{-x} & \text{per } x > 2 \end{cases}$ **2.D**

3. Siano $Q_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y \leq 4\}$ e $f: Q_\alpha \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = 5 + x^2$. È allora necessariamente vero che:

- 3.A** Nessuna delle altre affermazioni è esatta $\alpha \in [-2, 2] \Rightarrow \min f = 5$ **3.B**
3.C $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \max f = 5 + (\alpha + 2)^2$ e $\min f = 5 + (\alpha - 2)^2$ $\alpha < -2 \Rightarrow \max f = 5 + (\alpha - 2)^2$ e $\min f = 5$ **3.D**

4. Sia $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathbf{C}^1(\mathbf{R})$. Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = |f(x)| \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- 4.A** potrebbe ammettere più soluzioni $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ ammette un'unica soluzione locale **4.B**
4.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta ammette un'unica soluzione locale se e solo se $f(x_0) \neq 0$ **4.D**

5. Sia $D_{r,R}$ la porzione di corona circolare centrata nell'origine di raggi r e R (con $r < R$) contenuta nel semipiano

$y \geq 0$. Allora $\lim_{(r,R) \rightarrow (0,\pi/3)} \iint_{D_{r,R}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy =$

- 5.A** $\pi/3$ **5.B** $2\pi/3$
5.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta **5.D** $+\infty$
- 6.** Data $\chi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-k-1, -k[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, sia $f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^k}{x^2} \chi_k(x)$. Tra le seguenti affermazioni:
- (1) la successione f_n è uniformemente convergente su \mathbf{R} ;
(2) la successione f_n converge uniformemente su $[-2e, 2e]$ ad una funzione di classe \mathbf{C}^∞ ;
(3) il limite puntuale della successione f_n è discontinuo o non definito in 0;
(4) la successione f_n non converge uniformemente su $[0, +\infty[$.
- 6.A** È vera solo la (2) Nessuna delle altre affermazioni è esatta **6.B**
6.C Sone vere la (3) e la (4) Sono vere la (1) e la (2) **6.D**
- 7.** L'equazione $x^{43} + \sinh(x^2 + y - y^2) + \ln(x^2 + y^3 + e) = 1$ definisce una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di $(0, 0)$. Per la funzione φ , $x = 0$ è
- 7.A** un punto di massimo locale un punto di flesso orizzontale **7.B**
7.C Nessuna delle altre affermazioni è esatta un punto di minimo locale **7.D**
- 8.** Nel punto $(1, 1, 0)$, la funzione $f: \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ data da $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2z + \sinh(x+y-10)}{x+y^2-z^2} & \text{per } x + y^2 - z^2 \neq 0 \\ 0 & \text{per } x + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$
- 8.A** è continua ma non derivabile Nessuna delle altre affermazioni è esatta **8.B**
8.C è differenziabile non è continua **8.D**

Analisi Matematica 2
Facoltà di Ingegneria, Brescia, A.A.2002/2003 – Terzo Scritto

Risposte esatte:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Compito A:	D	B	B	A	D	A	B	C
Compito B:	C	C	A	A	B	C	C	A
Compito C:	A	C	D	A	A	A	C	D
Compito D:	B	A	B	B	B	A	A	C