CONSERVATION LAWS IN THE MODELING OF FLUIDS PUMPED IN PIPES: ANALYTICAL AND NUMERICAL RESULTS

Marco Fenaroli

Relatore: Prof. Rinaldo M. Colombo
Correlatore: Prof. Alessandro Musesti

16 Dicembre 2013

Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Densità di Massa} \\ \boldsymbol{q} &= \text{Densità di Quantità di Moto} \end{aligned}$$

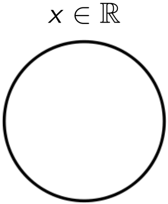
Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Densità di Massa} \\ q &= \text{Densità di Quantità di Moto} \end{aligned}$$

Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico
- Tubo di Sezione Costante



Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico
- Tubo di Sezione Costante
- Equazione di stato

$$p(\rho) \in C^2(\mathring{\mathbb{R}}^+; \mathbb{R}^+)$$
$$p'(\rho) > 0, p''(\rho) \geq 0, \ \forall \rho \in \mathring{\mathbb{R}}^+$$

$$\begin{array}{lrcl} \boxed{\boldsymbol{\gamma = 1}} & p(\rho) & = & \rho c^2 \\ \boxed{\boldsymbol{\gamma > 1}} & p(\rho) & = & p_* \left(\dfrac{\rho}{\rho_*}\right)^\gamma \end{array}$$

Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico
- Tubo di Sezione Costante
- Equazione di stato
- Conservazione della Massa

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0$$

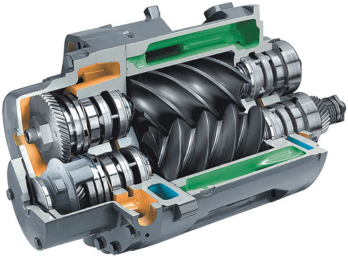
Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico
- Tubo di Sezione Costante
- Equazione di stato
- Conservazione della Massa
- Conservazione della Quantità di Moto

$$\partial_t \rho + \partial_x \left(\frac{q^2}{\rho} + p(\rho) \right) = 0$$

Modelli - Gas

- Gas/Vapore Comprimibile non Viscoso
- Isotermo/Isoentropico
- Tubo di Sezione Costante
- Equazione di stato
- Conservazione della Massa
- Bilancio della Quantità di Moto
- Compressore



Modelli - Liquidi

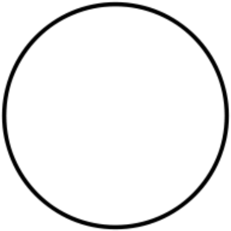
- Liquido Incomprimibile non Viscoso

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Sezione Bagnata} \\
Q &= \text{Portata Volumetrica}
\end{aligned}
$$

Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante

$x \in \mathbb{R}$



Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante
- Legge di Pressione

$$p(A) \in C^2(\mathring{\mathbb{R}}^+; \mathbb{R}^+)$$
$$p'(A) > 0, p''(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathring{\mathbb{R}}^+$$

Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante
- Legge di Pressione
- Conservazione della Massa

$$\partial_t A + \partial_x Q = 0$$

Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante
- Legge di Pressione
- Conservazione della Massa
- Conservazione della Quantità di Moto

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{A} + p(A) \right) = 0$$

Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante
- Legge di Pressione
- Conservazione della Massa
- Conservazione della Quantità di Moto
- Preissmann Slot

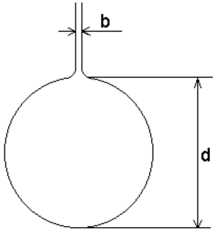
Modifica $p(A)$

$\Downarrow$

Modifica Sezione Tubo

$\Downarrow$

Apertura Parte Alta Tubo



Modelli - Liquidi

$$p(h) = g \begin{cases} \frac{1}{3k} h^3 & 0 \leq h \leq h_1 \\ rh^2 - kr^2 h + \frac{1}{3} k^2 r^3 & h_1 < h \leq h_2 \\ -\frac{1}{3k} h^3 + \frac{2}{k} rh^2 + \left(\pi - \frac{4}{k}\right) r^2 h + \\ + \left(\frac{1}{3} k^2 + \frac{\pi^3}{24k}\right) r^3 & h_2 < h \leq h_P \\ \frac{1}{2} w_P h^2 + \left(\pi r^2 - 2 r w_P + \frac{k}{4} w_P^2\right) h + \\ -\pi r^3 + 2 r^2 w_P - \frac{k}{2} r w_P^2 + \frac{k^2}{4} w_P^3 & h_P < h \end{cases}$$

$$h(A) = \begin{cases} \sqrt{kA} & 0 \leq A \leq A_1 \\ \frac{1}{2r} A + \frac{k}{2} r & A_1 < A \leq A_2 \\ 2r - \sqrt{k(\pi r^2 - A)} & A_2 < A \leq A_P \\ \frac{1}{w_P} A - \frac{\pi}{w_P} r^2 - \frac{k}{4} w_P + 2r & A_P < A \end{cases}$$

con $k = 2 - \frac{\pi}{2}$, $h_1 = kr$, $h_2 = \frac{\pi}{2} r$

Modelli - Liquidi

- Liquido Incomprimibile non Viscoso
- Tubo di Sezione Costante
- Legge di Pressione
- Conservazione della Massa
- Bilancio della Quantità di Moto
- Preissmann Slot
- Pompa

Modelli - Giunto

- Conservazione della Massa

$$q_l - q_r = 0$$

- Conservazione della Massa

$$q_l - q_r = 0$$

Modelli - Giunto

- Conservazione della Massa
- Bilancio della Quantità di Moto

$$P(\rho_l, q_l) - P(\rho_r, q_r) = J(H) \quad \Rightarrow \quad P(\rho, q) : \text{Pressione Dinamica}$$

- Conservazione della Massa
- Bilancio dell'Energia

$$F(\rho_l, q_l) - F(\rho_r, q_r) = K(H) \quad \Rightarrow \quad F(\rho, q) : \text{Flusso di Entropia}$$

Modelli - Giunto

- Conservazione della Massa
- Bilancio della Quantità di Moto

$$\Psi_1 : \begin{cases} q_l - q_r & = & 0 \\ \frac{q_l^2}{\rho_l} + p(\rho_l) - \frac{q_r^2}{\rho_r} - p(\rho_r) & = & \rho g H \end{cases}$$

- Conservazione della Massa
- Bilancio dell'Energia

$$\Psi_2 : \begin{cases} q_l - q_r & = & 0 \\ \frac{q_l}{\rho_l}\left(\frac{q_l^2}{2\rho_l} + \rho_l \int_{\rho^*}^{\rho_l} \frac{p'(r)}{r} dr\right) - \frac{q_r}{\rho_r}\left(\frac{q_r^2}{2\rho_r} + \rho_r \int_{\rho^*}^{\rho_r} \frac{p'(r)}{r} dr\right) & = & qgH \end{cases}$$

Modelli - Giunto

- Conservazione della Massa
- Bilancio della Quantità di Moto

$$\Psi_1 : \begin{cases} q_l - q_r & = & 0 \\ \frac{q_l^2}{\rho_l} + p(\rho_l) - \frac{q_r^2}{\rho_r} - p(\rho_r) & = & \rho g H \end{cases}$$

$\boxed{\text{ANALOGO PER LIQUIDI}}$

- Conservazione della Massa
- Bilancio dell'Energia

$$\Psi_2 : \begin{cases} q_l - q_r & = & 0 \\ \frac{q_l}{\rho_l}\left(\frac{q_l^2}{2\rho_l} + \rho_l \int_{\rho^*}^{\rho_l} \frac{p'(r)}{r} dr\right) - \frac{q_r}{\rho_r}\left(\frac{q_r^2}{2\rho_r} + \rho_r \int_{\rho^*}^{\rho_r} \frac{p'(r)}{r} dr\right) & = & qgH \end{cases}$$

- Shock e Soluzioni Deboli

✓ Interazioni Shock-Pompa $\Rightarrow$ Problemi Costruttivi

✓ Formulazione Debole

✓ Condizioni di Rankine-Hugoniot

Analisi

- Shock e Soluzioni Deboli
- Problema di Riemann

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_t \rho_i + \partial_x q_i & = & 0 \\ \partial_t q_i + \partial_x \left(\frac{q_i^2}{\rho_i} + p(\rho_i) \right) & = & 0 \\ (\rho_i, q_i)(0, x) & = & (\overline{\rho}_i, \overline{q}_i) \end{array}\right. \qquad i \in \{l, r\}$$

Nei Tubi $\Rightarrow$ Lax, 1956

Analisi

- Shock e Soluzioni Deboli
- Problema di Riemann
- Problema di Cauchy

✓ Soluzione Debole $\Rightarrow$ Mappa $u \in C^0([0, T]; \overline{u} + L^1)$

✓ Condizione al Giunto Verificata per q.o. $t \in \mathbb{R}^+$

✓ *Entropia-Flusso di Entropia* $\Rightarrow$ Selezione Soluzione

Nei Tubi $\Rightarrow$ Bressan, 1995

Analisi

- Shock e Soluzioni Deboli
- Problema di Riemann
- Problema di Cauchy
- Condizioni al Giunto

GAS LIQUIDI

Quantità di Moto Energia

$$\begin{cases} \partial_t \rho_l + \partial_x q_l & = & 0 \\ \partial_t q_l + \partial_x \left(\frac{q_l^2}{\rho_l} + p(\rho_l) \right) & = & 0 \\ \partial_t \rho_r + \partial_x q_r & = & 0 \\ \partial_t q_r + \partial_x \left(\frac{q_r^2}{\rho_r} + p(\rho_r) \right) & = & 0 \\ q_l - q_r & = & 0 \\ P(\rho_l, q_l) - P(\rho_r, q_r) & = & J(H) \end{cases}$$

Analisi

- Shock e Soluzioni Deboli
- Problema di Riemann
- Problema di Cauchy
- Condizioni al Giunto
- Teorema - Ipotesi

✓ f sufficientemente regolare

✓ Autovalori di $Df_i(\overline{u})$: $\lambda_1(\overline{u}) < 0 < \lambda_n(\overline{u})$

✓ Mappa con

$$\det[D_l\Psi(\overline{u})r_2^l(\overline{u}_l) \qquad D_r\Psi(\overline{u})r_2^r(\overline{u}_r)] \neq 0$$

$$\Downarrow$$

Analisi

- Shock e Soluzioni Deboli
- Problema di Riemann
- Problema di Cauchy
- Condizioni al Giunto
- Teorema - Tesi

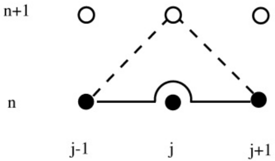
$\exists\delta, L > 0$ e Mappa $S : [0, +\infty[\times \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ t.c.

1. DOMINIO: $\mathcal{D} \supseteq \{u \in \overline{u} + L^1 : TV(u) < \delta\}$;
2. SEMIGRUPPO: $\forall u \in \mathcal{D}, S_0 u = u$, $\forall s, t \geq 0$: $S_s S_t u = S_{s+t} u$
3. LIPSCHITZIANITÀ in L^1: $\forall u, w \in \mathcal{D}$, $\forall s, t \geq 0$: $\|S_t u - S_s w\|_{L^1} \leq L \cdot (\|u - w\|_{L^1} + |t - s|)$
4. $u \in \mathcal{D}$ Costante a Tratti $\rightarrow S_t u \equiv$ Soluzione Problemi di Riemann Centrati nei Punti di Salto

Integrazioni Numeriche

- Algoritmi

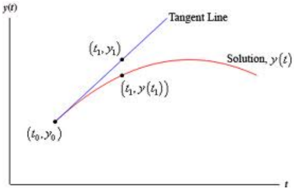
Parametri



$\boxed{\text{Lax-Friedrichs}} \Rightarrow$ Parte Convettiva

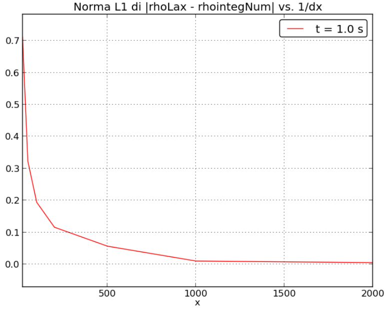
$\boxed{\text{Eulero Esplicito}} \Rightarrow$ Parte Sorgente

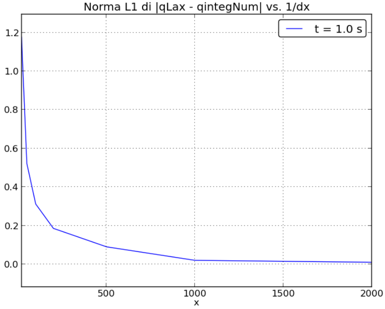
$\boxed{\text{Metodo di Newton}} \Rightarrow$ Giunto



Integrazioni Numeriche

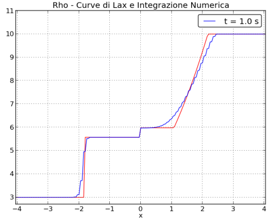
- Algoritmi
  - Controllo Conservazione
  - Stima dell'Errore il L^1

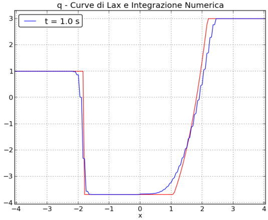


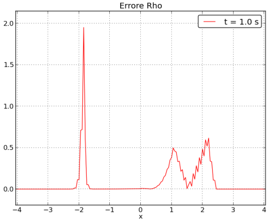


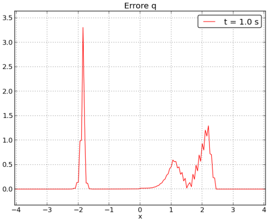
Integrazioni Numeriche - Algoritmi

$\boxed{dx = 0.05}$



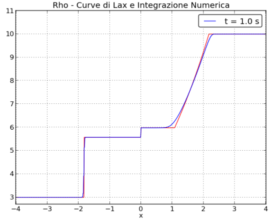


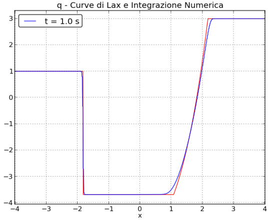


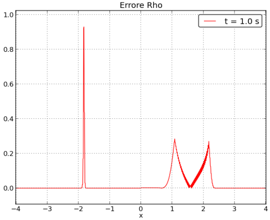


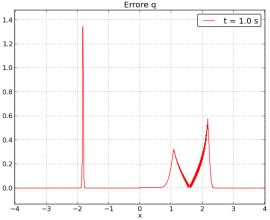
Integrazioni Numeriche - Algoritmi

$\boxed{dx = 0.01}$



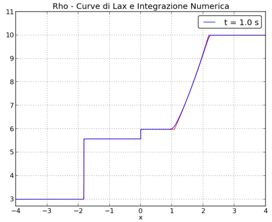


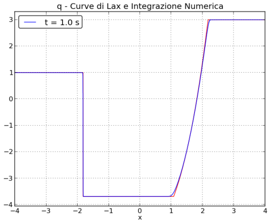


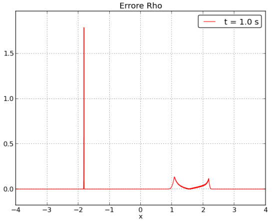


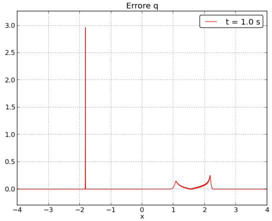
Integrazioni Numeriche - Algoritmi

$\boxed{dx = 0.002}$









Gas - Compressore

Gas - Turbina

Integrazioni Numeriche - Risultati

Gas - Periodicità

Gas - Transitorio Iniziale

Liquido - Transitorio Iniziale con Attrito

Integrazioni Numeriche - Risultati

Liquido - Transitorio Iniziale con Attrito

Integrazioni Numeriche - Conclusioni

- ✓ Quattro modelli 1D che descrivono la dinamica di fluidi pompati in tubi
- ✓ Effetto della pompa su quantità di moto o energia totale del fluido
- ✓ Tempi di calcolo dell'ordine di minuti e memoria richiesta di pochi Mega
- ✓ Modello competitivo con quelli che prevedono una descrizione 3D

Integrazioni Numeriche - Conclusioni

- ✓ Quattro modelli 1D che descrivono la dinamica di fluidi pompati in tubi
- ✓ Effetto della pompa su quantità di moto o energia totale del fluido
- ✓ Tempi di calcolo dell'ordine di minuti e memoria richiesta di pochi Mega
- ✓ Modello competitivo con quelli che prevedono una descrizione 3D

Possibili Sviluppi Futuri

- ✓ Confronto tra risultati sperimentali e numerici
- ✓ Stima dei parametri per la taratura del modello
- ✓ Controllo Ottimale dei transitori della pompa

GRAZIE per l'ATTENZIONE